KTH Matematik
B.Ek

Lösningar tentamen 5B1928 Logik för D (och IT), 29 augusti 2007

1) Det handlar om knarröborna A, B och C.
A säger: ”Om C är kung är vi alla det.” B säger: ”A och C är olika sorter.”
Vad kan sägas om A, B och C:s sorter, det är frågan.
Om C är narr, är A:s utsaga sann, så **A är kung**. Då talar B sanning, så **B är kung**.
Om C är kung, kan inte A också vara det, då skulle ju enligt A:s utsaga alla vara kungar, men B:s utsaga falsk, motsägelse. Däremot går det bra att **A är narr**, hans utsaga blir ju falsk, medan B:s blir sann, så **B är kung**.
Svar: B är kung. A och C är olika sorter, men man kan inte veta vilka.
Mer formellt: Om A, B, C är påståendena att A, B resp. C är kung får vi:
Sentenserna $A \leftrightarrow (C \rightarrow ((A \,\&\, B) \,\&\, C)$ och $B \leftrightarrow {\sim}(A \leftrightarrow C)$, som uttrycker att A:s påstående är sant precis om A är kung och motsvarande för B, båda är sanna.
Sanningsvärdestabeller ger samma resultat som ovan.

2) Att visa: $(A \,\&\, B) \rightarrow (C \rightarrow D), {\sim}D \;\vdash\; (A \,\&\, C) \rightarrow {\sim}B$.
Plan: Vi antar $A \,\&\, C$ och sedan B, för ∼I och sedan →I. Det fungerar:

1	(1)	$(A \,\&\, B) \rightarrow (C \rightarrow D)$	premiss	
2	(2)	${\sim}D$	premiss	
3	(3)	$A \,\&\, C$	antagande	
4	(4)	B	antagande	
3	(5)	A	3	&E
3,4	(6)	$A \,\&\, B$	5,4	&I
1,3,4	(7)	$C \rightarrow D$	1,6	→E
3	(8)	C	3	&E
1,3,4	(9)	D	7,8	→E
1,2,3,4	(10)	$\curlywedge$	2,9	∼E
1,2,3	(11)	${\sim}B$	4,10	∼I
1,2	(12)	$(A \,\&\, C) \rightarrow {\sim}B$	3,11	→I

Slutsatsen på rad (12) beror bara av premisserna på rad (1) och (2), **saken är klar**.

3) För att avgöra om
$\forall x\,(Fx \vee Gx) \,\&\, \exists y\, Fy \;\vDash\; \forall x\, Fx \vee \exists y\, Gy$
söker vi motexempel
(tolkningar med premissen sann, slutsatsen falsk):

I tablån växlar de tre faserna så:
1. Satslogiska 1,2 ; 9,10
2. $\mathbb{T}\exists, \mathbb{F}\forall$ 3,4 ;
3. $\mathbb{T}\forall, \mathbb{F}\exists$ 5,6,7,8 ;

$\mathbb{T}:$	$\forall x\,(Fx \vee Gx) \,\&\, \exists y\, Fy$	$\surd_1$
$\mathbb{F}:$	$\forall x\, Fx \vee \exists y\, Gy$	$\surd_2$
$_1\mathbb{T}:$	$\forall x\,(Fx \vee Gx)$	a_5, b_6
$_1\mathbb{T}:$	$\exists y\, Fy$	$\surd_{3:a}$
$_2\mathbb{F}:$	$\forall x\, Fx$	$\surd_{4:b}$
$_2\mathbb{F}:$	$\exists y\, Gy$	a_7, b_8
$_3\mathbb{T}:$	Fa	
$_4\mathbb{F}:$	Fb	
$_5\mathbb{T}:$	$Fa \vee Ga$	$\surd_9$
$_6\mathbb{T}:$	$Fb \vee Gb$	$\surd_{10}$
$_7\mathbb{F}:$	Ga	
$_8\mathbb{F}:$	Gb	

$_9\mathbb{T}:\; Fa$ $\qquad\qquad$ $_9\mathbb{T}:\; Ga$ $\times$

$_{10}\mathbb{T}:\; Fb$ $\times$ $\qquad$ $_{10}\mathbb{T}:\; Gb$ $\times$

Tablån sluter sig, så
svar: slutledningen är giltig.

4) Att visa: $\exists x \sim Fx \vee \forall y\, Gy \ \vdash \ \forall x\, \exists y\, (Fy \to Gx)$.

Plan: Slutsatsen följer tydligen av varje disjunkt för sig, vi använder $\vee$E.

1	(1)	$\exists x \sim Fx \vee \forall y\, Gy$	premiss		
2	(2)	$\exists x \sim Fx$	antagande		
3	(3)	$\sim Fa$	antagande		
3	(4)	$Fa \to Gb$	3	SI(PMI$_2$)	
3	(5)	$\exists y\, (Fy \to Gb)$	4	$\exists$I	
3	(6)	$\forall x\, \exists y\, (Fy \to Gx)$	5	$\forall$I	[b inte i (3)]
2	(7)	$\forall x\, \exists y\, (Fy \to Gx)$	2,3,6	$\exists$E	[a inte i (2),(6)]
8	(8)	$\forall y\, Gy$	antagande		
8	(9)	Gc	8	$\forall$E	
8	(10)	$Fd \to Gc$	9	SI(PMI$_1$)	
8	(11)	$\exists y\, (Fy \to Gc)$	10	$\exists$I	
8	(12)	$\forall x\, \exists y\, (Fy \to Gx)$	11	$\forall$I	[c inte i (8)]
1	(13)	$\forall x\, \exists y\, (Fy \to Gx)$	1,2,7,8,12	$\vee$E	

Slutsatsen på rad (13) beror bara av premissen på rad (1), **saken är klar**.

5) 1. ”Varje hund tycker om (minst) en katt som tycker om alla hundar”,
dvs ”För alla x, om x är en hund tycker x om en katt som tycker om alla hundar”,
dvs ”För alla x, om Hx så finns y så att y är en katt som tycker om alla hundar och x tycker om y”,
dvs ”För alla x, om Hx så finns y så att Ky och för alla z, om Hz så Tyz, och Txy”,
så **svar**: $\boldsymbol{\forall x\, (Hx \to \exists y\, (Ky\ \&\ \forall z\, (Hz \to Tyz)\ \&\ Txy))}$
2. ”Pluto är den enda hunden som tycker om alla katter”,
dvs ”För alla x: x är Pluto omm x är en hund som tycker om alla katter”,
dvs ”För alla x, $x = p$ omm (Hx och för alla y, (om y är en katt, tycker x om y))”,
så **svar**: $\boldsymbol{\forall x\, (x = p \leftrightarrow (Hx\ \&\ \forall y\, (Ky \to Txy)))}$
I båda fallen är förstås logiskt ekvivalenta varianter möjliga.

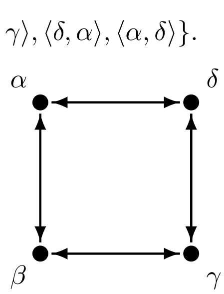
6) För att visa att $\forall x\, \exists y\, \exists z\, (y \neq z\ \&\ (Pxy\ \&\ Pxz)) \nvDash \exists x\, \exists y\, \exists z\, ((Pxy\ \&\ Pyz)\ \&\ Pxz)$ skall vi finna en tolkning som gör premissen sann och den tänkta slutsatsen falsk.
Premissen p, $\forall x\, \exists y\, \exists z\, (y \neq z\ \&\ (Pxy\ \&\ Pxz))$, säger precis att det går minst två pilar från varje punkt.
Slutsatsen s, $\exists x\, \exists y\, \exists z\, ((Pxy\ \&\ Pyz)\ \&\ Pxz)$, säger att det finns två pilar med den andras bas i den förstas spets och en tredje pil från den förstas bas till den andras spets.
Om det finns någon ”ögla”, dvs Paa är sant för något a, är också s sann ($x = y = z = a$).
För att få vårt motexempel måste vi alltså ta en modell utan öglor.
Ett tillräckligt (men inte nödvändigt) villkor för att s skall vara falsk är att det inte finns tre pilar som bildar en triangel (inte heller med någon pil räknad flera gånger). Tydligen blir p sann och s falsk med tolkningen (se figuren):

$D = \{\alpha, \beta\, \gamma, \delta\}$, $\quad \mathrm{Ext}(P) = \{\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \alpha \rangle, \langle \beta, \gamma \rangle, \langle \gamma, \beta \rangle, \langle \gamma, \delta \rangle, \langle \delta, \gamma \rangle, \langle \delta, \alpha \rangle, \langle \alpha, \delta \rangle\}$.

Den gör ju

- $\boldsymbol{\forall x\, \exists y\, \exists z\, (y \neq z\ \&\ (Pxy\ \&\ Pxz))}$ **sann**,
  ty det går två pilar från varje punkt
- $\boldsymbol{\exists x\, \exists y\, \exists z\, ((Pxy\ \&\ Pyz)\ \&\ Pxz)}$ **falsk**,
  ty inga tre pilar bildar en triangel

så **saken är klar.**



7) Att visa: $\forall x\,\forall y\,((Rxy\,\&\,(Fx\,\&\,Fy))\to x=y),\ \exists x\,\exists y\,Rxy\ \vdash\ \exists x\,(Fx\to Rxx)$.
Idé: Om Fx gäller för alla x, tag a, b med Rab enligt premiss 2 (dvs $\exists$E). Premiss 1 ger då $a = b$, så Rbb. Annars gäller $\sim Fc$ för något c. I båda fallen fås $Fx\to Rxx$ för något x, dvs slutsatsen.

1	(1)	$\forall x\,\forall y\,((Rxy\,\&\,(Fx\,\&\,Fy))\to x=y)$	premiss		
2	(2)	$\exists x\,\exists y\,Rxy$	premiss		
	(3)	$\forall x\,Fx\vee\sim\forall x\,Fx$		SI(LEM)	
4	(4)	$\forall x\,Fx$	antagande		
5	(5)	$\exists y\,Ray$	antagande		
6	(6)	Rab	antagande		
1	(7)	$\forall y\,((Ray\,\&\,(Fa\,\&\,Fy))\to a=y)$	1	$\forall$E	
1	(8)	$(Rab\,\&\,(Fa\,\&\,Fb))\to a=b$	7	$\forall$E	
4	(9)	Fa	4	$\forall$E	
4	(10)	Fb	4	$\forall$E	
4	(11)	$Fa\,\&\,Fb$	9,10	&I	
4,6	(12)	$Rab\,\&\,(Fa\,\&\,Fb)$	6,11	&I	
1,4,6	(13)	$a=b$	8,12	$\to$E	
1,4,6	(14)	Rbb	13,6	=E	
1,4,6	(15)	$Fb\to Rbb$	14	SI(PMI$_1$)	
1,4,6	(16)	$\exists x\,(Fx\to Rxx)$	15	$\exists$I	
1,4,5	(17)	$\exists x\,(Fx\to Rxx)$	5,6,16	$\exists$E	[b inte i (5),(16),(1),(4)]
1,2,4	(18)	$\exists x\,(Fx\to Rxx)$	2,5,17	$\exists$E	[a inte i (2),(17),(1),(4)]
19	(19)	$\sim\forall x\,Fx$	antagande		
19	(20)	$\exists x\sim Fx$	19	SI(QS)	
21	(21)	$\sim Fc$	antagande		
21	(22)	$Fc\to Rcc$	21	SI(PMI$_2$)	
21	(23)	$\exists x\,(Fx\to Rxx)$	22	$\exists$I	
19	(24)	$\exists x\,(Fx\to Rxx)$	20,21,23	$\exists$E	[c inte i (20)]
1,2	(25)	$\exists x\,(Fx\to Rxx)$	3,4,18,19,24	$\vee$E	

Slutsatsen på rad (25) beror bara av premisserna på rad (1) och (2), **saken är klar**.

8) En relation $\mathcal{R}$ som gör $p_1 : \forall x\,\exists y\,Rxy$ och $p_2 : \forall x\,\forall y\,\forall z\,((Rxy\,\&\,Rzy)\to Rxz)$ sanna är

- **reflexiv**, dvs $\forall x\,Rxx$ är sann, ty för godtyckligt a finns enligt p_1 b så att Rab är sann och från p_2 fås att $(Rab\,\&\,Rab)\to Raa$ är sann, så Raa är sann
- **symmetrisk**, dvs $\forall x\,\forall y\,(Rxy\to Ryx)$ är sann, ty om Rab är sann, fås med reflexiviteten att $Rbb\,\&\,Rab$ är sann och eftersom $(Rbb\,\&\,Rab)\to Rba$ enligt p_2 är sann, är Rba sann, dvs $Rab\to Rba$
- **transitiv**, dvs $\forall x\,\forall y\,\forall z\,((Rxy\,\&\,Ryz)\to Rxz)$ är sann, ty om $Rab\,\&\,Rbc$ är sann ger symmetrin att $Rab\,\&\,Rcb$ är sann och eftersom $(Rab\,\&\,Rcb)\to Rac$ enligt p_2 är sann, är Rac sann, dvs $(Rab\,\&\,Rbc)\to Rac$

Svar: $\mathcal{R}$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv (dvs en ekvivalensrelation).

9) Vi har å ena sidan α): För något r gäller $p\vDash r$ och $q\vDash\sim r$ och å den andra β): $p\nvDash q$.
α) är sann precis om det inte finns någon tolkning som gör både p och q sanna (om det fanns en sådan skulle r och $\sim r$ vara sanna i den, omöjligt, om ingen finns duger p som r), dvs precis om q är falsk för **alla** tolkningar som gör p sann.
β) är sann precis om q är falsk för **någon** tolkning som gör p sann.
Då gäller $\alpha) \nRightarrow \beta)$, ty om p aldrig är sann, dvs p är $\curlywedge$, är α) sann (r t.ex. $\sim q$ (eller $\curlywedge$)) men β) falsk (ingen tolkning gör p sann).
Dessutom gäller $\beta) \nRightarrow \alpha)$, ty det kan både finnas tolkningar med p sann som gör q sann och sådana som gör q falsk (t.ex. om p är $\sim\curlywedge$ och q är A). Sådana tolkningar gör β) sann och α) falsk. **Svar: Nej, nej, dvs $\alpha) \nRightarrow \beta)$ och $\beta) \nRightarrow \alpha)$.**

10) Vi skall visa att ur $f(0) = 0$, $\forall x\,(f(S(x)) = f(x) \vee f(S(x)) = S(f(x)))$ och Peanos axiom följer att $\forall x\,\exists y\, f(x) + y = x$, dvs $\forall x\,\phi x$ med ϕx som formeln $\exists y\, f(x) + y = x$.
$\phi 0$ gäller, eftersom $f(0) + 0 \overset{\text{P3}}{=} f(0) \overset{\text{premiss}}{=} 0$, så (med $\exists$I) $\exists y\, f(0) + y = 0$.
Antag att ϕa gäller, dvs $\exists y\, f(a) + y = a$, så för något b gäller $f(a) + b = a$.
Enligt andra premissen gäller $f(S(a)) = f(a) \vee f(S(a)) = S(f(a))$.
Med $f(S(a)) = f(a)$ fås $f(S(a)) + S(b) = f(a) + S(b) \overset{\text{P4}}{=} S(f(a) + b) \overset{\phi a}{=} S(a)$, så ($\exists$I) $\phi S(a)$.
Med $f(S(a)) = S(f(a))$ fås $f(S(a)) + b = S(f(a)) + b \overset{\text{givet}}{=} S(f(a) + b) \overset{\phi a}{=} S(a)$, så ($\exists$I) $\phi S(a)$.
Därmed ($\vee$E) $\phi S(a)$, så $\phi a \to \phi S(a)$ för alla a, så ($\forall$I) $\forall x\,(\phi x \to \phi S(x))$.
Så $\phi 0$ & $\forall x\,(\phi x \to \phi S(x))$ gäller och enligt axiom P7 (med $n = 0$) gäller då $\forall x\,\phi x$, dvs det önskade $\boldsymbol{\forall x\,\exists y\, f(x) + y = x}$, så **saken är klar.**

11) Vi skall visa att $A \,\&\, \Diamond\!\sim\! B,\ \Box\,(A \to B) \vdash_{S5} \sim\!(\Diamond A \to \Box\, A)$.
Idé: Premiss 1 ger A, så $\Diamond A$. Om $\Box\, A$ gäller A i varje värld, så med $A \to B$ i varje värld (premiss 2) fås B i varje värld, vilket motsäger $\Diamond\!\sim\! B$ från premiss 1. Alltså $\Diamond A \,\&\! \sim\!\Box\, A$, så (SI) $\sim\!(\Diamond A \to \Box\, A)$.

1	(1)	$A \,\&\, \Diamond\!\sim\! B$	premiss		
2	(2)	$\Box\,(A \to B)$	premiss		
1	(3)	A	1	&E	
1	(4)	$\Diamond A$	3	$\Diamond$ I	
5	(5)	$\Box\, A$	antagande		
5	(6)	A	5	$\Box$ E	
2	(7)	$A \to B$	2	$\Box$ E	
2,5	(8)	B	7,6	$\to$E	
1	(9)	$\Diamond\!\sim\! B$	1	&E	
10	(10)	$\sim\! B$	antagande		
2,5,10	(11)	$\curlywedge$	10,8	$\sim$E	
1,2,5	(12)	$\curlywedge$	9,10,11	$\Diamond$ E	[(11),(2),(5) fullt modaliserade]
1,2	(13)	$\sim\!\Box\, A$	5,12	$\sim$I	
1,2	(14)	$\Diamond A \,\&\! \sim\!\Box\, A$	4,13	&I	
1,2	(15)	$\sim\!(\Diamond A \to \Box\, A)$	14	SI(Neg-Imp)	

Slutsatsen på sista raden beror bara av premisserna på rad (1) och (2), så **saken är klar**.

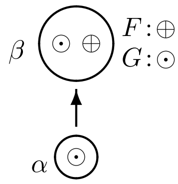
12) Vi skall visa att $\Box\,\forall x\,\Diamond\,\exists y\, Qxy \ \nvDash_{S5}\ \Box\,\forall x\,\exists y\,\Diamond\, Qxy$.
Vi söker alltså en tolkning som gör premissen sann och den tänkta slutsatsen falsk.
Premissen säger att för varje $\kappa \in D$ finns en värld där Qkl är sann för ett där existerande λ.
Slutsatsen säger att i varje värld gäller för alla σ där att det finns τ i samma värld så att Qst är sann i någon värld.
Vi kan utnyttja att σ, τ skall finnas i samma värld för att finna den önskade tolkningen:
$\mathcal{W} = \{w^*, u\},\ D = \{\alpha, \beta\},\ w^*(D) = \{\alpha\},\ u(D) = \{\beta\},\ w^*[Q] = \{\langle\beta, \alpha\rangle\},\ u[Q] = \{\langle\alpha, \beta\rangle\}$.
Den gör ju

- $\Box\,\forall x\,\Diamond\,\exists y\, Qxy$ **sann**,
  ty Qab är sann i u, där β finns, och Qba är sann i w^*, där α finns
- $\Box\,\forall x\,\exists y\,\Diamond\, Qxy$ **falsk**,
  ty i både w^* och u finns bara ett element och Qaa och Qbb är falska i alla världar

Saken är klar.

13) Vi skall visa att $A \to (\sim\! B \vee \sim\! C) \ \vDash_I\ C \to (B \to \sim\! A)$.
Låt som vanligt S vara mängden av informationstillstånd, med rot α och ordning $\leqslant$, i en intuitionistisk tolkning.
Antag att $\alpha \Vdash A \to (\sim\! B \vee \sim\! C)$. Vi skall visa att $\alpha \Vdash C \to (B \to \sim\! A)$.
Låt $\sigma \Vdash C$ för något $\sigma \in S$. Vi har att visa att $\sigma \Vdash B \to \sim\! A$. Låt alltså $\tau \Vdash B$ för ett $\tau \geq \sigma$, då skall vi visa att $\tau \Vdash \sim\! A$. Om $\upsilon \Vdash A$ för ett $\upsilon \geq \tau$, gäller $\upsilon \Vdash \sim\! B \vee \sim\! C$ (ty $\upsilon \geq \alpha$), dvs $\upsilon \Vdash \sim\! B$ eller $\upsilon \Vdash \sim\! C$, men $\upsilon \Vdash B$ (ty $\upsilon \geq \tau$) och $\upsilon \Vdash C$ (ty $\upsilon \geq \sigma$), motsägelse.
Således får vi $\upsilon \nVdash A$, så $\tau \Vdash \sim\! A$ och därmed $\sigma \Vdash B \to \sim\! A$ och $\alpha \Vdash C \to (B \to \sim\! A)$.
Saken är klar, vi har visat $\boldsymbol{A \to (\sim\! B \vee \sim\! C) \ \vDash_I\ C \to (B \to \sim\! A)}$.

14) Vi skall visa att $\sim\forall x\,(Fx \to Gx)\ \not\models_I\ \exists x \sim Gx$, förstås genom att finna en tolkning så att $\alpha \Vdash \sim\forall x\,(Fx\to Gx)$ och $\alpha \nVdash \exists x \sim Gx$.
Att $\alpha \nVdash \exists x \sim Gx$ betyder att det för alla $\circledast \in dom(\alpha)$ finns ett $\sigma \in S$ med $\sigma \Vdash G\circledast$. Om $\alpha \Vdash \sim\forall x\,(Fx \to Gx)$ också skall gälla, måste $\sigma \nVdash \forall x\,(Fx \to Gx)$, dvs det måste komma till ytterligare element, eventuellt högre upp i trädet.
Betrakta tolkningen (se fig.) $S = \{\alpha, \beta\}$, $\leqslant = \{\langle \alpha, \beta\rangle\}$,
$dom(\alpha) = \{\odot\}$, $dom(\beta) = \{\odot, \oplus\}$,
$warr(\alpha) = \varnothing$, $warr(\beta) = \{\langle \text{‘}F\text{’}, \oplus\rangle, \langle \text{‘}G\text{’}, \odot\rangle\}$.
Den ger:



- $\alpha \Vdash \sim\forall x\,(Fx\to Gx)$, ty $\alpha, \beta \nVdash \forall x\,(Fx\to Gx)$,
  ty $\beta \nVdash F\oplus \to G\oplus$, ty $\beta \Vdash F\oplus$ och $\beta \nVdash G\oplus$
- $\alpha \nVdash \exists x \sim Gx$, ty $\alpha \nVdash \sim G\odot$,
  ty $\beta \Vdash G\odot$

Så **saken är klar**, vi har visat $\boldsymbol{\sim\forall x\,(Fx \to Gx)\ \not\models_I\ \exists x \sim Gx}$.

15) Villkoret på Γ och Δ att det i varje tolkning skall finnas $p \in \Gamma$ och $q \in \Delta$ med samma sanningsvärde, innebär precis att $\Sigma = \{\sim(p \leftrightarrow q) \mid p \in \Gamma, q \in \Delta\}$ saknar modell.
Enligt kompakthetssatsen finns det en ändlig $\Sigma' \subseteq \Sigma$ som också saknar modell. Om vi låter Γ' och Δ' vara mängderna av sentenser i Γ resp. Δ som förekommer i Σ', kommer mängden $\{\sim(p \leftrightarrow q) \mid p \in \Gamma', q \in \Delta'\}$ att innehålla Σ', så den saknar också modell.
Tydligen är Γ' och Δ' ändliga delmängder till Γ och Δ som har den önskade egenskapen.
Saken är klar.

16) Vi skall avgöra om sentensen $\forall X\,\exists u(\forall x\, u(x) \neq x\ \&\ \forall x\,\forall y\,(Xxu(y) \leftrightarrow Xu(x)y))$ är en tautologi, betingat sann eller en kontradiktion.
Den är sann i en tolkning (dvs för en viss domän D) precis om det för varje val av $\mathrm{Ext}(R)$ finns $\mathrm{Ref}(f)$ så att $\forall x\, f(x) \neq x\ \&\ \forall x\,\forall y\,(Rxf(y) \leftrightarrow Rf(x)y)$ är sann.
Om $|D| = 1$, är $\forall x\, f(x) \neq x$ falsk, så sentensen falsk.
Om $|D| \geq 2$, tag ett $\alpha \in D$ och välj $\mathrm{Ext}(R) = \{\langle \alpha, \sigma\rangle \mid \sigma \in D\}$, dvs Rkl sann precis om $k = a$ är det. Då är $Raf(t)$ sann och $Rf(a)t$ falsk för alla $\tau \in D$ och alla tillåtna f ($f(a) \neq a$, ju), så $Raf(t) \leftrightarrow Rf(a)t$ falsk för alla t, så $\forall x\,\forall y\,(Rxf(y) \leftrightarrow Rf(x)y)$ är falsk.
Den givna sentensen är alltså falsk för alla D, så **svar: Sentensen är en kontradiktion.**
(Om man tillåter $D = \varnothing$, vilket vi inte gör i den här kursen, är sentensen sann då (varför?).)