Institutionen för matematik
KTH
J.Kristoferson, B.Ek

Tentamen i 5B1928, LOGIK för IT och D
Onsdagen den 14 december 2005

Skrivtid: 8.00 – 13.00.
Examinatorer: Jan Kristoferson (IT), tel 7907287, och Bengt Ek (D), tel 7906951.
Tillåtet hjälpmedel: Utdelat formelblad.
För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.
För godkänt krävs 13 poäng på del A. Uppgifterna ger maximalt 2 poäng var. Den som under år 2005 klarat kontrollskrivning nr i ($i = 1, 2, 3$) får automatiskt 2 poäng på uppgifterna nr $2i - 1$ och $2i$ (och skall inte göra dessa uppgifter).
Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du klarat.

Del A

1 Vid ett besök på Blarrön, där var och en antingen är kung (och alltid talar sanning), narr (och alltid ljuger) eller blar (som gör godtyckliga påståenden), möter vi de högstes råd. Detta består av tre personer A, B och C, varav en är kung, en är narr och en är blar. Vi frågar vem av dem som är kung, varvid A säger att C är kung, B säger att A är kung och C säger att han själv är kung. Avgör vem som är kung, narr respektive blar.

2 Visa med naturlig deduktion

$$B \to C,\ \sim(A \,\&\, C) \ \vdash\ A \to \sim B$$

3 Använd tablåmetoden för att avgöra om

$$\forall x\, Px \to \exists x\, Qx \ \models\ \exists x\,(Px \to Qx).$$

Om det inte gäller, använd tablån för att finna ett motexempel.

4 Visa med naturlig deduktion

$$\exists x\,(Px \to Qx) \ \vdash\ \forall x\, Px \to \exists x\, Qx.$$

5 Översätt följande till predikatlogiska sentenser:
1. ”Varje kung avskyr alla andra kungar.”
2. ”Ingen narr avskyr alla kungar som avskyr sig själv.”
Använd följande lexikon:
Kx : ”Ref(x) är kung”, Nx : ”Ref(x) är narr”, Axy : ”Ref(x) avskyr Ref(y)”.

6 Visa att

$$\forall x\,(Rxa \vee \forall y \sim Rxy), \forall x\, \exists y\,(x \neq y \,\&\, Rxy),\ \forall x \forall y \forall z\,((Rxy \,\&\, Ryz) \to Rxz)$$
$$\not\models\ \forall x\, Rxx.$$

Vänd!

7 Visa med naturlig deduktion

$$\forall x\,\forall y\,(Pxy \to \sim Pyx),\ \exists x\,\exists y\,Pxy\ \vdash\ \exists x\,\exists y\,x \neq y.$$

8 Bestäm någon binär relation $\mathcal{R}$ som har följande båda egenskaper:
$\forall x\,\exists y\,\exists z\,(Rxy\ \&\ Rxz\ \&\ x \neq y\ \&\ x \neq z\ \&\ y \neq z)$,
$\forall x\,\forall y\,(Rxy \to \sim Ryx)$.

9 Betrakta påståendena α) och β) om sentenserna p, q och r:

$$\alpha)\quad p \vDash q \Rightarrow p \vDash r \qquad\qquad \beta)\quad p \vDash q \to r$$

α) säger alltså att p, q, r är sådana att om q är en logisk följd av p, så är r det också, medan β) säger att p, q, r är sådana att $q \to r$ är en logisk följd av p. Gäller $\alpha) \Rightarrow \beta)$? Gäller $\beta) \Rightarrow \alpha)$? Motivera ordentligt.

10 Visa att det följer ur Peanos axiom att $\forall x\, x \neq S(x)$.
Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.

Del B

Denna del ger, om del A är godkänd, betyg fyra för 4-7 poäng och betyg fem för 8-12 poäng. Uppgifterna kan ge 2 poäng var. Uppgifterna är troligen inte ordnade efter svårighet. **Var noga med att motivera dina svar!**

11 Visa med naturlig deduktion i varianten S5 av modallogik (dvs den modallogik som presenteras i kursboken) att $\Box(\Diamond A \to B) \vdash_{S5} \Box(A \to \Box B)$.

12 Visa att i modal predikatlogik (fortfarande variant S5)

$$\Box\,\exists x\,x = x,\ \forall x\,\Box Px,\ \Diamond\forall x\,\Box Qx\ \nvDash_{S5}\ \Box\,\exists x\,(Px \to Qx).$$

13 Visa **med resonemang** att i intuitionistisk logik

$$\sim A \vee B \vDash_I A \to B.$$

Sambandet skall visas med ett resonemang om tolkningar, det är alltså **inte** tillåtet att använda t.ex. naturlig deduktion.

14 I klassisk logik kan $\exists y\,\forall x\,(Px \vee Qy)$ härledas från $\forall x\,\exists y\,(Px \vee Qy)$ med naturlig deduktion (detta behöver ej utföras). Visa att man då måste använda DN-regeln (eller någon SI-regel som beror på DN).

15 Låt Γ vara en sentensmängd i första ordningens predikatlogik med följande egenskap: varje tolkning gör någon sentens i Γ sann och någon falsk. Visa att det finns en ändlig delmängd Γ' av Γ med samma egenskap.

16 Vilka tolkningar gör följande sentens i andra ordningens predikatlogik sann? Motivera ditt svar ordentligt!

$$\forall X\,\exists u\,\forall x\,(u(u(x)) \neq x \leftrightarrow Xx)$$

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.