KTH Matematik Andreas Enblom

Tentamen i SF1642, LOGIK för IT och D
Onsdagen den 19 december 2007

Lösningsförslag

1. A påstår alltså $C \to A$. B påstår alltså $B \to (C \,\&\, \sim A)$. Vi analyserar situationen i en sanningstabell:

A	B	C	C	$\to$	A	B	$\to$	(	C	&	$\sim$	A	)
0	0	0		1			1			0			
0	0	1		0			1			1			
0	1	0		1			0			0			
0	1	1		0			1			1			
1	0	0		1			1			0			
1	0	1		1			1			0			
1	1	0		1			0			0			
1	1	1		1			0			0			

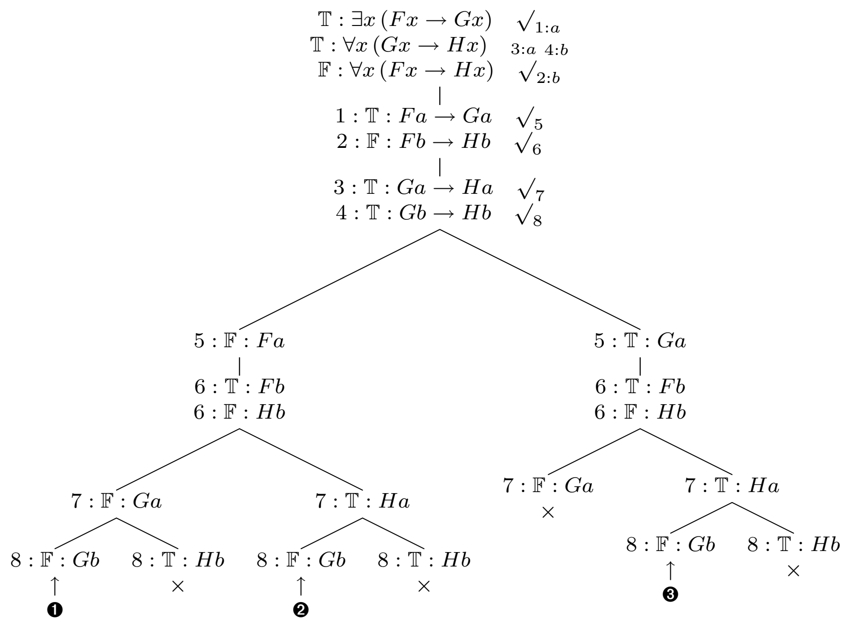
På rad 1,2,5 och 6 är B narr men gör ett sant påstående. Detta är omöjligt. På 3,7 och 8 är B kung och gör ett falsk påstående, vilket är omöjligt. Det enda tänkbara scenariot är alltså rad 4, där B är kung och gör ett sant påstående, och där A är narr och gör ett falskt påstående, vilket är precis som det ska vara.

Ja, det går att avgöra vad B är. Han är kung.

2.

1	(1)	$(A \to B) \vee \sim\sim D$	premiss
2	(2)	$(C \to B) \to D$	premiss
3	(3)	$C \to A$	premiss
4	(4)	$A \to B$	antagande
5	(5)	C	antagande
3,5	(6)	A	3,5 $\to$E
3,4,5	(7)	B	4,6 $\to$E
3,4	(8)	$C \to B$	5,7 $\to$I
2,3,4	(9)	D	2,8 $\to$E
10	(10)	$\sim\sim D$	antagande
10	(11)	D	10 DN
1,2,3	(12)	D	1,4,9,10,11 $\vee$E

3.



Eftersom tablån inte sluter sig så gäller inte logisk följd. En tolkning som gör premisserna sanna men slutsatsen falsk utläses ur en öppen gren som någon av följande (där $\pm$ betyder att man kan välja antingen $+$ eller $-$, eftersom detta sanningsvärde inte specificeras av motsvarande öppna gren i tablån):

❶	F	G	H
α	$-$	$-$	$\pm$
β	$+$	$-$	$-$

eller

❷	F	G	H
α	$-$	$\pm$	$+$
β	$+$	$-$	$-$

eller

❸	F	G	H
α	$\pm$	$+$	$+$
β	$+$	$-$	$-$

4.

1	(1)	$\forall x\, Px$	premiss
2	(2)	$\exists x\,(Px \to \sim Qx)$	premiss
3	(3)	$\forall x\, Qx$	antagande
4	(4)	$Pa \to \sim Qa$	antagande
1	(5)	Pa	1 $\forall$E
1,4	(6)	$\sim Qa$	4,5 $\to$E
3	(7)	Qa	3 $\forall$E
1,3,4	(8)	$\curlywedge$	6,7 $\sim$E
1,2,3	(9)	$\curlywedge$	2,4,8 $\exists$E (a ej på rad 1,2,3,8)
1,2	(10)	$\sim\forall x\, Qx$	3,9 $\sim$I

5. a) $\forall x\,(Bx \to \exists y\,\exists z\,(y \neq z \,\&\, My \,\&\, Mz \,\&\, Txy \,\&\, Txz))$

b) $\sim\exists x\,(Bx \,\&\, Tax)$ eller ekvivalent $\forall x\,(Bx \to \sim Tax)$

6. Låt oss göra en grafisk tolkning med punkter och pilar.

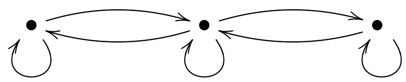
   Premiss 1 betyder ”För varje pil finns en pil tillbaka”.

   Premiss 2 betyder ”Någon punkt har en pil från alla punkter”.

   Premiss 3 betyder ”Varje punkt har en pil till sig själv”.

   Slutsatsen betyder ”Alla tänkbara pilar finns med i grafen”.

   En graf som uppfyller de tre premisserna men inte slutsatsen är exempelvis följande:



   Alltså finns en tolkning där premisserna är uppfyllda men inte slutsatsen och alltså gäller inte logisk följd, vilket skulle visas.

7.

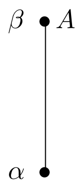
1	(1)	$\exists x\, \forall y\, (Ryx \to x = y)$	premiss
2	(2)	$\forall x\, \forall y\, (Rxy \to Ryx)$	premiss
3	(3)	$\forall y\, (Rya \to a = y)$	antagande
3	(4)	$Rba \to a = b$	3 $\forall$E
2	(5)	$\forall y\, (Ray \to Rya)$	2 $\forall$E
2	(6)	$Rab \to Rba$	5 $\forall$E
7	(7)	Rab	antagande
2,7	(8)	Rba	6,7 $\to$E
2,3,7	(9)	$a = b$	4,8 $\to$E
2,3	(10)	$Rab \to a = b$	7,9 $\to$I
2,3	(11)	$\forall y\, (Ray \to a = y)$	10 $\forall$I (b ej på rad 2,3)
2,3	(12)	$\exists x\, \forall y\, (Rxy \to x = y)$	11 $\exists$I
1,2	(13)	$\exists x\, \forall y\, (Rxy \to x = y)$	1,3,12 $\exists$E (a ej på rad 1,2,12)

8. Betrakta tolkningen som ges av $D = \{\alpha\}$, $\mathrm{Ext}(F) = \varnothing$, $\mathrm{Ext}(R) = \{\langle \alpha, \alpha \rangle\}$ och A : falsk. I denna tolkning är $A \to \exists x\, Fx$ sann eftersom A är falsk. Vidare är $\sim Fa$ sann, så $\exists y\, Ray \to\ \sim Fa$ är sant, och eftersom den enda individ som finns är α så gäller därmed $\forall x\, (\exists y\, Rxy \to\ \sim Fx)$. Till sist är Raa sant i denna tolkning, så $\exists y\, Ray$ är sant, och därmed $\forall x\, \exists y\, Rxy$. Detta betyder alltså att $\sim \forall x\, \exists y\, Rxy$ är falskt, så $\sim \forall x\, \exists y\, Rxy \to A$ är sant. Vi har alltså visat att denna tolkning gör samtliga tre sentenser sanna.

9.

1	(1)	$\Box A$	premiss
2	(2)	$\Diamond(A \to (B \vee \Diamond C))$	premiss
3	(3)	$A \to (B \vee \Diamond C)$	antagande
1	(4)	A	1 $\Box$E
1,3	(5)	$B \vee \Diamond C$	3,4 $\to$E
6	(6)	B	antagande
6	(7)	$B \vee C$	6 $\vee$I
6	(8)	$\Diamond(B \vee C)$	7 $\Diamond$I
9	(9)	$\Diamond C$	antagande
10	(10)	C	antagande
10	(11)	$B \vee C$	10 $\vee$I
10	(12)	$\Diamond(B \vee C)$	11 $\Diamond$I
9	(13)	$\Diamond(B \vee C)$	9,10,12 $\Diamond$E (rad 12 fullt modaliserad)
1,3	(14)	$\Diamond(B \vee C)$	5,6,8,9,13 $\vee$E
1,2	(15)	$\Diamond(B \vee C)$	2,3,14 $\Diamond$E (rad 1 och 14 fullt modaliserade)

10. Betrakta följande intuitionistiska tolkning:



Eftersom inget tillstånd $\sigma \geq \alpha$ uppfyller $\sigma \Vdash {\sim}A$ så gäller $\alpha \Vdash {\sim}A \to B$. Vidare gäller varken $\alpha \Vdash A$ eller $\alpha \Vdash B$, vilket betyder att $\alpha \nVdash A \vee B$. Alltså visar denna tolkning att ${\sim}A \to B \nvDash_{\mathrm{I}} A \vee B$.

11. Låt ϕx beteckna formeln $0 + x = x + 0$. Låt oss med induktion härleda $\forall x\, \phi x$.

Basfall: Att $0 + 0 = 0 + 0$ är trivialt uppfyllt; varje individ är lika med sig själv. Alltså gäller $\phi 0$.

Induktionssteg: Tag ett godtyckligt a och antag att ϕa gäller, det vill säga att $0 + a = a + 0$. Låt oss visa att $\phi S(a)$, det vill säga att $0 + S(a) = S(a) + 0$. Vi har att

$$0 + S(a) \overset{\text{P4}}{=} S(0 + a) \overset{\text{Antagandet}}{=} S(a + 0) \overset{\text{P3}}{=} S(a) \overset{\text{P3}}{=} S(a) + 0,$$

det vill säga att $\phi S(a)$. Vi har allså härlett $\phi a \to \phi S(a)$ och eftersom a var godtycklig så följer $\forall x\,(\phi x \to \phi S(x))$.

Vi har alltså visat $\phi 0 \,\&\, \forall x\,(\phi x \to \phi S(x))$, vilket enligt induktionsaxiomet P7 ger oss att $\forall x\, \phi x$, det vill säga att $\forall x\, 0 + x = x + 0$.

12. Eftersom exempelvis $A, A \nvDash \curlywedge$ är det inte så att $p, p \vDash \curlywedge$ för alla sentenser p. Alltså är $\mathscr{R}$ inte reflexiv.

    Tag sentenser p, q och antag att $\mathscr{R}pq$, det vill säga att $p, q \vDash \curlywedge$. Då gäller givetvis också $q, p \vDash \curlywedge$, det vill säga $\mathscr{R}qp$. Vi har alltså visat att om $\mathscr{R}pq$ så $\mathscr{R}qp$. Eftersom p och q var godtyckliga så gäller detta för alla sentenser p, q. Alltså är $\mathscr{R}$ symmetrisk.

    Låt nu p vara sentensen A, q vara sentensen $\sim A$ och r vara sentensen A. Eftersom $A, \sim A \vDash \curlywedge$, och $\sim A, A \vDash \curlywedge$, så har vi att $\mathscr{R}pq$ och $\mathscr{R}qr$. Men däremot gäller inte $\mathscr{R}pr$ eftersom $A, A \nvDash \curlywedge$. Alltså är $\mathscr{R}$ inte transitiv.

13. Betrakta följande tolkning i modal predikatlogik:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \qquad & \bullet \\ w^* & & u \\ \{\alpha\} & & \{\beta\} \\ R : \varnothing & & R : \{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle\} \end{array}$$

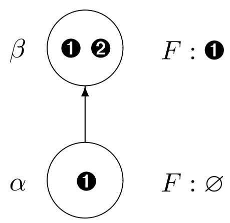
    Eftersom Raa är sann i världen u så gäller $\Diamond Raa$, och eftersom α är en individ i den aktuella världen w^* så får vi att $\exists x\, \exists y\, \Diamond Rxy$ gäller i denna tolkning.

    Vidare, Eftersom Rab gäller i världen u och β är en individ i världen u så gäller $\exists y\, Ray$ i världen u. I synnerhet gäller $\Diamond\exists y\, Ray$, och eftersom a är en individ i den aktuella världen w^* så gäller $\exists x\, \Diamond\exists y\, Rxy$ i denna tolkning.

    Till sist, eftersom det inte finns några individer x, y i världen w^* sådana att Rxy gäller i denna värld, och inte heller några individier x, y i världen u sådana att Rxy gäller i u, så gäller $\exists x\, \exists y\, Rxy$ varken i världen w^* eller i u. Alltså gäller inte $\Diamond\exists x\, \exists y\, Rxy$ i denna tolkning.

    Sammanfattningsvis har vi hittat en tolkning där de båda premisserna är uppfyllda, men inte slutsatsen. Detta betyder att logisk följd inte gäller, vilket skulle visas.

14. Betrakta följande intuitionistiska tolkning:



    Eftersom $\beta \nVdash F$❷ så gäller både $\alpha \nVdash \forall x\, Fx$ och $\beta \nVdash \forall x\, Fx$. Alltså gäller $\sigma \nVdash \forall x\, Fx$ för alla $\sigma \geq \alpha$, det vill säga att $\alpha \Vdash \sim\forall x\, Fx$.

    Vidare gäller $\beta \Vdash F$❶ så $\alpha \nVdash \sim F$❶. Eftersom ❶ är den enda individen i tillståndet α så visar detta att $\alpha \nVdash \exists x \sim Fx$.

    Vi har alltså en tolkning där $\alpha \Vdash \sim\forall x\, Fx$, men $\alpha \nVdash \exists x \sim Fx$. Detta visar att $\sim\forall x\, Fx \nvDash_{\mathrm{I}} \exists x \sim Fx$.

15. Låt $\Omega = \Gamma \cup \{q\}$. Att $\Gamma \models \ \sim q$ betyder att $\Omega \models \curlywedge$, det vill säga att Ω saknar modeller. Därmed finns det en ändlig delmängd Ω' till Ω som saknar modeller. Vi har nu tre fall:

    a) $\Omega' = \{q\}$. Att Ω' saknar modeller betyder här att $q \models \curlywedge$. Alltså gäller i synnerhet

    $$q, p_1, p_2, \ldots, p_n \models \curlywedge$$

    oavsett vilka sentenser $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vi väljer i Γ. Eftersom Γ är icke-tom så följer påståendet.

    b) Ω' är en delmängd till Γ. Eftersom Ω' måste vara icke-tom för att kunna sakna modeller kan vi skriva $\Omega' = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ för några sentenser $p_1, p_2, \ldots, p_n$ i Γ. Att Ω' saknar modeller betyder att $\Omega' \models \curlywedge$, det vill säga att $p_1, p_2, \ldots, p_n \models \curlywedge$, och därmed gäller i synnerhet

    $$q, p_1, p_2, \ldots, p_n \models \curlywedge.$$

    Även här gäller alltså påståendet.

    c) $\Omega' = \{q, p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ för några sentenser $p_1, p_2, \ldots, p_n$ i mängden Γ. Att Ω' saknar modeller betyder att $\Omega' \models \curlywedge$, det vill säga att

    $$q, p_1, p_2, \ldots, p_n \models \curlywedge,$$

    och saken är klar eftersom påståendet gäller i alla tre fall.

16. Vi visar i stället följande ekvivalenta påstående:

    $$\text{Om } p \not\models q \text{ så } p \not\models_{\mathrm{I}} q.$$

    Antag att $p \not\models q$. Då finns det en klassisk tolkning $\mathscr{I}$, som gör p sann och q falsk.

    Betrakta nu den inuitionistiska tolkningen $\mathscr{I}_{\mathrm{I}}$ som bara består av ett enda tillstånd, α, och som uppfyller att $warr(\alpha)$, det vill säga de atomära sentenser som garanteras av tillståndet α, är precis de atomära sentenser som tilldelas sanningsvärdet 1 av tolkningen $\mathscr{I}$. Det återstår att visa att $\alpha \Vdash p$ och att $\alpha \nVdash q$ i tolkningen $\mathscr{I}_{\mathrm{I}}$, för i så fall gäller ju $p \not\models_{\mathrm{I}} q$.

    Nu gör vi observationen att eftersom $\mathscr{I}_{\mathrm{I}}$ bara innehåller ett enda tillstånd, nämligen α, så gäller för varje satslogisk sentens r att $\alpha \Vdash r$ i tolkningen $\mathscr{I}_{\mathrm{I}}$ om och endast om r görs sann i tolkningen $\mathscr{I}$. Eftersom $\mathscr{I}$ gör p sann och q falsk får vi att $\alpha \Vdash p$ och $\alpha \nVdash q$. Saken är klar.