Institutionen för matematik
KTH
J.Kristoferson, B.Ek

Lösningar tentamen 5B1928 Logik för D och IT, 16 januari 2006

1) Vi har påståendena:
A: ”Minst en av C och mig är kung.”
B: ”A och C är olika sorter.”
C: ”A är kung.”
Om C är kung är det hon säger sant, så A är också kung. Om C är narr ljuger hon, så A är också narr. **A och C är alltså samma sort**.
B påstår motsatsen, så **B är narr**.
Om A och C är kungar, är A:s utsaga sann. Om de båda är narrar, är den falsk. Det ”stämmer” i båda fallen, så mer än ovanstående kan vi inte säkert säga.
Svar: A och C är samma sort och B är narr.
Formellt: Om A är påståendet att A är kung och motsvarande för B, C, vet vi att $A \leftrightarrow (C \vee A)$, $B \leftrightarrow \sim(A \leftrightarrow C)$, $C \leftrightarrow A$ är sanna. T.ex. sanningsvärdestabell ger svaret.
(A:s uttalande är tydligen ”onödigt”, det ger ingen mer information, men detta måste förstås kontrolleras.)

2) Att visa: $A \vee C,\ (A \,\&\, B) \to C \ \vdash \sim C \to \sim B$.
Idé: Antag $\sim C$ och visa $\sim B$, genom att anta B och få C både med A och C, motsägelse ($\vee$E).

1	(1)	$A \vee C$	premiss	
2	(2)	$(A \,\&\, B) \to C$	premiss	
3	(3)	$\sim C$	antagande	
4	(4)	B	antagande	
5	(5)	A	antagande	
4,5	(6)	$A \,\&\, B$	5,4	&I
2,4,5	(7)	C	2,6	$\to$E
8	(8)	C	antagande	
1,2,4	(9)	C	1,5,7,8,8	$\vee$E
1,2,3,4	(10)	$\curlywedge$	3,9	$\sim$E
1,2,3	(11)	$\sim B$	4,10	$\sim$I
1,2	(12)	$\sim C \to \sim B$	3,11	$\to$I

Slutsatsen på rad (12) beror bara av premisserna på raderna (1) och (2), **saken är klar**.

3) För att visa att $Fa \to \forall x\, Gx \ \nvDash \ \exists x\, Fx \to \exists x\, Gx$ skall vi finna en tolkning som gör premissen sann och den tänkta slutsatsen falsk.
$\exists x\, Fx \to \exists x\, Gx$ är falsk precis om $\exists x\, Fx$ är sann och $\exists x\, Gx$ är falsk. Då är också $\forall x\, Gx$ falsk, så för att $Fa \to \forall x\, Gx$ skall vara sann måste Fa vara falsk. Vi leds till tolkningen härintill. Den gör ju Fa, $\forall x\, Gx$, $\exists x\, Gx$ falska och $\exists x\, Fx$ sann, så **påståendet följer** enligt ovan.

	F	G
α	$-$	$-$
β	$+$	$-$

4) För att avgöra om $\forall x\, (Fx \to \forall y\, Gy) \ \vDash \ \forall x\, (Fa \to Gx)$ söker vi motexempel (tolkningar som gör premissen sann och slutsatsen falsk):

I tablån växlar de tre faserna:
1. Satslogiska - ; 4–6
2. $\mathbb{T}\exists, \mathbb{F}\forall$ 1 ; -
3. $\mathbb{T}\forall, \mathbb{F}\exists$ 2,3 ; 7,8

$\mathbb{T}:\ \forall x\, (Fx \to \forall y\, Gy)\quad a_2, b_3$
$\mathbb{F}:\ \forall x\, (Fa \to Gx)\quad \surd_{1:b}$
${}_1\mathbb{F}:\ Fa \to Gb\quad \surd_4$
${}_2\mathbb{T}:\ Fa \to \forall y\, Gy\quad \surd_5$
${}_3\mathbb{T}:\ Fb \to \forall y\, Gy\quad \surd_6$
${}_4\mathbb{T}:\ Fa$
${}_4\mathbb{F}:\ Gb$

Vänster gren:
${}_5\mathbb{F}:\ Fa$
$\times$

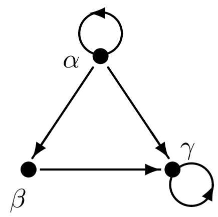
Höger gren:
${}_5\mathbb{T}:\ \forall y\, Gy\quad a_7, b_8$

${}_6\mathbb{F}:\ Fb$	${}_6\mathbb{T}:\ \forall y\, Gy$
${}_7\mathbb{T}:\ Ga$	${}_7\mathbb{T}:\ Ga$
${}_8\mathbb{T}:\ Gb$	${}_8\mathbb{T}:\ Gb$
$\times$	$\times$

Tablån sluter sig, så **slutledningen är giltig.**

5) 1. "Varje pojke litar på någon annan pojke."
dvs "För alla x: om x är pojke finns y så att y är pojke, x och y är olika och x litar på y",
så **svar**: $\forall x\,(Px \to \exists y\,(Py \,\&\, x \neq y \,\&\, Lxy))$
(mer precist: $\forall x\,(Px \to \exists y\,((Py \,\&\, {\sim} x = y) \,\&\, Lxy)))$
2. "Det finns en flicka som litar på precis dem som litar på någon pojke."
dvs "Det finns x så att x är flicka och för alla y gäller att x litar på y precis om (omm) det finns z så att z är pojke och y litar på z"
så **svar**: $\exists x\,(Fx \,\&\, \forall y\,(Lxy \leftrightarrow \exists z\,(Pz \,\&\, Lyz)))$
Logiskt ekvivalenta varianter är förstås möjliga.

6) Uttryckt i "punkter och pilar" säger $p_1 : \forall x \forall y\,((Pxy \,\&\, Pyx) \to x = y)$ att det inte finns andra dubbelriktade pilar än loopar (dvs pilar från punkter till sig själva), $p_2 : \forall x \exists y\, Pxy$ säger att minst en pil startar i varje punkt, $p_3 : \exists x \forall y\, Pxy$ säger att det finns en punkt med pilar till alla punkter (inklusive den själv) medan $q : \forall x\, Pxx \vee \forall x\, {\sim} Pxx$ är falsk precis om det finns minst en punkt utan någon loop och minst en punkt med.
Vi visar $p_1, p_2, p_3 \nvDash q$ genom att finna en tolkning som gör p_1, p_2 och p_3 sanna och q falsk.
Enligt p_3 innehåller domänen D i den sökta tolkningen ett element α med pilar till alla, dvs $Paa, Pab, \ldots$ sanna. Eftersom q är falsk finns ett element utan loop, kalla det β. p_1 förbjuder Pba och p_2 kräver en pil från β. Det finns alltså minst ett element till, γ, med Pbc sann. Enligt p_2 finns en pil från γ. Pca och Pcb förbjuds av p_1, men Pcc går bra. Detta ger tolkningen (se figuren)
$D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\text{Ext}(P) = \{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle, \langle\alpha,\gamma\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\gamma,\gamma\rangle\}$.
Den gör p_1, p_2, p_3 sanna och q falsk, så **saken är klar**.



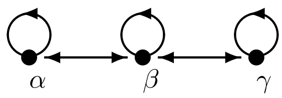
7) Att visa: $\exists x\, Fx$, $\exists x\,(Fx \to Gx)$, $\forall x\, {\sim} Gx \vdash \exists x \exists y\, x \neq y$.
Idé: Fa gäller för något a och $Fb \to Gb$ för något b. Om $a = b$ gällde skulle Gb gälla, men det motsäger $\forall x\, {\sim} Gx$. Det behövs tydligen $\exists$E två gånger.

1	(1)	$\exists x\, Fx$	premiss		
2	(2)	$\exists x\,(Fx \to Gx)$	premiss		
3	(3)	$\forall x\, {\sim} Gx$	premiss		
4	(4)	Fa	antagande		
5	(5)	$Fb \to Gb$	antagande		
6	(6)	$a = b$	antagande		
4,6	(7)	Fb	6,4	=E	
4,5,6	(8)	Gb	5,7	→E	
3	(9)	${\sim} Gb$	3	∀E	
3,4,5,6	(10)	$\curlywedge$	9,8	∼E	
3,4,5	(11)	$a \neq b$	6,10	∼I	
3,4,5	(12)	$\exists y\, a \neq y$	11	∃I	
3,4,5	(13)	$\exists x \exists y\, x \neq y$	12	∃I	
2,3,4	(14)	$\exists x \exists y\, x \neq y$	2,5,13	∃E	[b inte i (2),(13),(3),(4)]
1,2,3	(15)	$\exists x \exists y\, x \neq y$	1,4,14	∃E	[a inte i (1),(14),(2),(3)]

Slutsatsen på rad (15) beror bara av premisserna på rad (1), (2) och (3), **saken är klar**.

8) En binär relation $\mathcal{R}$ som gör $\forall x \forall y\,(Rxy \to (Ryx \,\&\, Ryy)) \,\&\, \forall x \exists y\, Rxy$ sann är

- **symmetrisk**, dvs $\forall x \forall y\,(Rxy \to Ryx)$ är sann, ty för godtyckliga a och b ger $\forall x \forall y\,(Rxy \to (Ryx \;\&\; Ryy))$ att $Rab \to (Rba \;\&\; Rbb)$, så om Rab är sann är också $Rba \,\&\, Rbb$ det och speciellt Rba, således $Rab \to Rba$
- **reflexiv**, dvs $\forall x\, Rxx$ är sann, ty $\forall x \exists y\, Rxy$ ger att det för godtyckligt a finns c så att Rac, enligt symmetrin då också Rca, och som nyss gäller $Rca \to (Rac \,\&\, Raa)$, således $Rac \,\&\, Raa$, speciellt Raa
- **inte (säkert) transitiv**, dvs $\forall x \forall y \forall z\,((Rxy \;\&\; Ryz) \to Rxz)$ behöver inte vara sann, vilket ses av tolkningen (se figuren)
  $D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ $\text{Ext}(P) = \{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle, \langle\beta,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\gamma,\beta\rangle, \langle\gamma,\gamma\rangle\}$.
  Den gör den givna sentensen sann, men inte $(Rab \,\&\, Rbc) \to Rac$



Svar: $\mathcal{R}$ är reflexiv och symmetrisk, men inte säkert transitiv.

9) Vi har: $\alpha)\ \sim p \nvDash q \qquad \beta)\ \nvDash p$ och $\nvDash q$.
$\alpha)$ betyder precis att det finns minst en tolkning som gör $\sim p$ sann, dvs p falsk, och q falsk.
$\beta)$ betyder precis att det finns minst en tolkning som gör p falsk och minst en tolkning (inte säkert samma) som gör q falsk.
Tydligen gäller $\alpha \Rightarrow \beta$ (till och med samma tolkning gör p och q falska).
Exemplet $p : A,\ q : \sim A$, som gör $\beta)$ sann ($\nvDash A$ och $\nvDash \sim A$ gäller) men $\alpha)$ falsk ($\sim A \vDash \sim A$ gäller) visar att $\beta) \nRightarrow \alpha)$.
Så **svar:** $\alpha) \Rightarrow \beta), \quad \beta) \nRightarrow \alpha)$**.**

10) Låt ϕx vara formeln $S(0) * x = x$. Vi skall visa $\forall x\, \phi x$.
$\phi 0$ gäller eftersom $S(0) * 0 \overset{\text{P5}}{=} 0$.
Antag att ϕa gäller, dvs $S(0) * a = a$.
Då fås $S(0) * S(a) \overset{\text{P6}}{=} (S(0) * a) + S(0) \overset{\phi a}{=} a + S(0) \overset{\text{P4}}{=} S(a + 0) \overset{\text{P3}}{=} S(a)$, dvs $\phi S(a)$.
Därmed gäller $\phi a \rightarrow \phi S(a)$ för alla a, så $\forall x\, (\phi x \rightarrow \phi S(x))$.
Så $\phi 0\ \&\ \forall x\, (\phi x \rightarrow \phi S(x))$ gäller och enligt axiom P7 (med $n = 0$) gäller då $\forall x\, \phi x$, dvs **det önskade** $\forall x\, S(0) * x = x$ **är visat**.

11) Vi skall visa att $\Diamond A \rightarrow \Box A \vdash_{S5} \sim A \rightarrow \Box \sim A$.
Idé: Antag att $\sim A$ gäller i den verkliga världen. Om $\Diamond A$ gällde skulle premissen ge $\Box A$ och då A i varje värld, speciellt den verkliga, motsägelse, så $\sim \Diamond A$ gäller. Ur den kan vi som vanligt härleda $\Box \sim A$, **men** härledningen kräver fullt modaliserade förutsättningar, vilket $\sim A$ inte är. Vi får anta något vi vet, härleda en implikation etc.

1	(1)	$\Diamond A \rightarrow \Box A$	premiss		
2	(2)	$\sim A$	antagande		
3	(3)	$\Diamond A$	antagande		
1,3	(4)	$\Box A$	1,3	$\rightarrow$E	
1,3	(5)	A	4	$\Box$E	
1,2,3	(6)	$\curlywedge$	2,5	$\sim$E	
1,2	(7)	$\sim \Diamond A$	3,6	$\sim$I	
8	(8)	$\sim \Diamond A$	antagande		
9	(9)	A	antagande		
9	(10)	$\Diamond A$	9	$\Diamond$I	
8,9	(11)	$\curlywedge$	8,10	$\sim$E	
8	(12)	$\sim A$	9,11	$\sim$I	
8	(13)	$\Box \sim A$	12	$\Box$I	[(8) fullt modaliserad]
	(14)	$\sim \Diamond A \rightarrow \Box \sim A$	8,13	$\rightarrow$I	
1,2	(15)	$\Box \sim A$	14,7	$\rightarrow$E	
1	(16)	$\sim A \rightarrow \Box \sim A$	2,15	$\rightarrow$I	

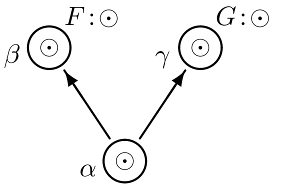
Slutsatsen på sista raden beror bara av premissen på rad (1), så **saken är klar**.

12) Vi skall visa att $\Box \forall x \forall y\, Pxy \nvDash_{S5} \Diamond \forall x \Box \forall y\, Pxy$.
Vi söker alltså en tolkning som gör premissen sann och den tänkta slutsatsen falsk.
Premissen sann ger att $\forall x \forall y\, Pxy$ är sann i varje värld, dvs i varje värld står alla existerande element i relationen P till varandra.
$\Diamond \forall x \Box \forall y\, Pxy$ falsk ger att inte i någon värld är $\forall x \Box \forall y\, Pxy$ sann, dvs i varje värld finns ett element, a säg, så att det finns någon värld med ett existerande element, b säg, där Pab är falsk. a kan tydligen inte existera i den senare världen.
Tolkning: $\mathcal{W} = \{w^*, u\},\ D = \{\alpha, \beta\},\ w^*(D) = \{\alpha\},\ u(D) = \{\beta\}$,
$w^*[P] = \{\langle \alpha, \alpha \rangle\},\ u[P] = \{\langle \beta, \beta \rangle\}$.
Den **visar att** $\Box \forall x \forall y\, Pxy \nvDash_{S5} \Diamond \forall x \Box \forall y\, Pxy$ **ty:**

- $\Box \forall x \forall y\, Pxy$ är **sann**, ty $w^*[\Box \forall x \forall y\, Pxy] = 1$,
  ty $w^*[\forall x \forall y\, Pxy] = 1$ (ty $w^*(D) = \{\alpha\}$ och $w^*[Paa] = 1$, ty $\langle \alpha, \alpha \rangle \in w^*[P]$)
  och $u[\forall x \forall y\, Pxy] = 1$ (ty $u(D) = \{\beta\}$ och $u[Pbb] = 1$, ty $\langle \beta, \beta \rangle \in u[P]$)
- $\Diamond \forall x \Box \forall y\, Pxy$ är **falsk**, ty $w^*[\Diamond \forall x \Box \forall y\, Pxy] = 0$,
  ty $w^*[\forall x \Box \forall y\, Pxy] = 0$ (ty $\alpha \in w^*(D)$ och $w^*[\Box \forall y\, Pay] = 0$,
  ty $u[\forall y\, Pay] = 0$, ty $\beta \in u(D)$ och $u[Pab] = 0$, ty $\langle \alpha, \beta \rangle \notin u[P]$)
  och $u[\forall x \Box \forall y\, Pxy] = 0$ (ty $\beta \in u(D)$ och $u[\Box \forall y\, Pby] = 0$,
  ty $w^*[\forall y\, Pby] = 0$, ty $\alpha \in w^*(D)$ och $w^*[Pba] = 0$, ty $\langle \beta, \alpha \rangle \notin w^*[P]$)

13) Vi skall visa att $A \to (B \vee {\sim} C) \ \vDash_I \ {\sim} B \to {\sim}(A \,\&\, C)$.
Låt som vanligt S vara mängden av informationstillstånd, med rot α och ordning $\leq$, i en intuitionistisk tolkning.
Antag att $\alpha \Vdash \ A \to (B \vee {\sim} C)$. Om vi då visar att $\alpha \Vdash {\sim} B \to {\sim}(A \,\&\, C)$ är saken klar. Det gäller alltså att visa att om $\sigma \Vdash {\sim} B$ för något $\sigma \in S$ så gäller också $\sigma \Vdash {\sim}(A \,\&\, C)$, dvs att för alla $\tau \in S$ med $\sigma \leq \tau$ gäller $\tau \nVdash A \,\&\, C$, dvs $\tau \nVdash A$ eller $\tau \nVdash C$. Men om $\tau \Vdash A$, gäller, eftersom vi antagit $\alpha \Vdash \ A \to (B \vee {\sim} C)$, att $\tau \Vdash B \vee {\sim} C$, dvs $\tau \Vdash B$ eller $\tau \Vdash {\sim} C$. Eftersom $\sigma \Vdash {\sim} B$ med $\sigma \leq \tau$ gäller $\tau \nVdash B$, så $\tau \Vdash {\sim} C$, vilket medför $\tau \nVdash C$. Således $\tau \nVdash A$ eller $\tau \nVdash C$ och **saken är klar**, vi har visat $\ A \to (B \vee {\sim} C) \ \vDash_I \ {\sim} B \to {\sim}(A \,\&\, C)$.

14) Vi skall visa att ${\sim} \exists x\,(Fx \,\&\, Gx) \ \nvDash_I \ \forall x\,({\sim} Fx \vee {\sim} Gx)$ genom att finna en tolkning så att $\alpha \Vdash {\sim} \exists x\,(Fx \,\&\, Gx)$ och $\alpha \nVdash \forall x\,({\sim} Fx \vee {\sim} Gx)$.



För att visa motsvarande (riktiga) logiska följd i klassisk logik, använder man ${\sim} \exists x\, Px \ \vDash \ \forall x \ {\sim} Px$ och ${\sim}(A \,\&\, B) \ \vDash {\sim} A \vee {\sim} B$. I intuitionistisk logik gäller den första men inte den andra av dessa. Vi "använder" alltså den andra för att finna den sökta tolkningen.
Betrakta tolkningen (se fig.) $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\leqslant = \{\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \alpha, \gamma \rangle\}$,
$dom(\alpha) = dom(\beta) = dom(\gamma) = \{\odot\}$,
$warr(\alpha) = \varnothing$, $warr(\beta) = \{\langle \text{‘}F\text{’}, \odot \rangle\}$, $warr(\gamma) = \{\langle \text{‘}G\text{’}, \odot \rangle\}$.
Den ger:

- $\alpha \Vdash {\sim} \exists x\,(Fx \,\&\, Gx)$, ty $\alpha, \beta, \gamma \nVdash \exists x\,(Fx \,\&\, Gx)$, ty $\alpha, \beta, \gamma \nVdash F\odot \,\&\, G\odot$, ty $\alpha, \beta \nVdash G\odot$, $\alpha, \gamma \nVdash F\odot$ och $dom(\alpha) = dom(\beta) = dom(\gamma) = \{\odot\}$
- $\alpha \nVdash \forall x\,({\sim} Fx \vee {\sim} Gx)$, ty $\alpha \nVdash {\sim} F \odot \ \vee {\sim} G\odot$, ty $\alpha \nVdash {\sim} F\odot$ (ty $\beta \Vdash F\odot$) och $\alpha \nVdash {\sim} G\odot$ (ty $\gamma \Vdash G\odot$) och $\odot \in dom(\alpha)$

Så **saken är klar**.

15) En modell för Γ_n (Γ_∞) som gör q sann är precis en modell för $\Gamma_n \cup \{q\}$ ($\Gamma_\infty \cup \{q\}$).
Enligt kompakthetssatsen har $\Gamma_\infty \cup \{q\}$ en modell precis om varje ändlig delmängd, Γ', av den har en modell. Men för varje sådant Γ' finns ett största k så att $p_k \in \Gamma'$. Det betyder att $\Gamma' \subset \Gamma_n \cup \{q\}$ då $n > k$. Eftersom det finns en modell för $\Gamma_n \cup \{q\}$ för oändligt många n finns det en med $n > k$ och alltså en modell för Γ'. **Påståendet följer.**

16) Den givna sentensen $\exists u\, \exists X\, \forall x\,((Xx \leftrightarrow {\sim}\, Xu(u(x))) \ \& \ \forall y\,(u(x) = u(y) \to x = y))$ är sann i en tolkning (dvs för en viss domän D) precis om sentensen i första ordningens logik $\forall x\,((Px \leftrightarrow {\sim}\, Pf(f(x))) \ \& \ \forall y\,(f(x) = f(y) \to x = y))$ är sann för någon tolkning av funktionssymbolen f och predikatsymbolen P.
Låt $\alpha_0 \in D$ avbildas av $\mathrm{Ref}(f) : D \to D$ enligt $\alpha_0 \mapsto \alpha_1 \mapsto \alpha_2 \ldots$. Eftersom D är ändlig måste denna följd innehålla någon upprepning, låt l vara det minsta talet så att $\alpha_l = \alpha_k$ för något $k < l$. Men $\forall x\, \forall y\,(f(x) = f(y) \to x = y)$ är sann, så $k = 0$ (annars vore $\alpha_{k-1} = \alpha_{l-1}$, dvs l inte minimalt) och α_0 ingår i en sluten kedja (en **cykel**) under $\mathrm{Ref}(f)$:s verkan. α_0 var godtyckligt, så hela D delas in i sådana cykler.
Eftersom $\forall x\,(Px \leftrightarrow {\sim}\, Pf(f(x)))$ är sann, gäller $\alpha_i \in \mathrm{Ext}(P) \ \Leftrightarrow \ \alpha_{i+2} \notin \mathrm{Ext}(P)$. Det betyder att i hela cykeln kommer omväxlande två element i $\mathrm{Ext}(P)$, två element i $D \setminus \mathrm{Ext}(P)$, två element i $\mathrm{Ext}(P)$ etc. För att det skall "gå ihop" måste cykelns längd vara en multipel av 4. Detta skall gälla för alla cykler, så totala antalet element i domänen, $|D|$, måste vara en multipel av 4.
Alternativt kan man se detta så (kortare, men kanske svårare att komma på): Domänen $D = D_{11} \cup D_{10} \cup D_{00} \cup D_{01}$, där $D_{11}, D_{10,\ldots}$ är de disjunkta mängderna $D_{11} = \{\iota \in D \mid Pi$ och $Pf(i)$ sanna$\}$, $D_{10} = \{\iota \in D \mid Pi$ och ${\sim} Pf(i)$ sanna$\}$ etc. Då avbildar $\mathrm{Ref}(f) : D_{11} \to D_{10} \to D_{00} \to D_{01} \to D_{11}$ och eftersom $\mathrm{Ref}(f)$ avbildar olika element på olika, måste $|D_{11}| \leq |D_{10}| \leq |D_{00}| \leq |D_{01}| \leq |D_{11}|$. De fyra mängderna är alltså alla lika stora och resultatet blir som nyss.
Omvänt, om $|D|$ är en multipel av 4, finner vi tolkningar av f och P som gör sentensen ovan sann: Dela in D i grupper om fyra element, låt $\mathrm{Ref}(f)$ ha alla dessa som cykler och $\mathrm{Ext}(P)$ innehålla precis två i rad i varje cykel. Detta gör tydligen sentensen sann och därmed är den givna andra ordningens sentens sann.
Svar: Sentensen är sann precis om (den ändliga) domänens antal element är delbart med 4.