KTH Matematik
B.Ek, J.Kristoferson

Tentamen i 5B1928, LOGIK för D och IT
Lördagen den 4 juni 2005 kl. 14.00 – 19.00.

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Tillåtet hjälpmedel: Utdelat formelblad.
För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.
För godkänt krävs 13 poäng på del A. Uppgifterna ger maximalt 2 poäng var. Den som vårterminen 2005 klarat kontrollskrivning nr i ($i = 1, 2, 3$) får automatiskt 2 poäng på uppgifterna nr $2i - 1$ och $2i$ (och skall inte göra dessa uppgifter).
Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du klarat.

Del A

1 Vid ett besök på Knarrön (där ju var och en antingen är kung (och alltid talar sanning) eller narr (och alltid ljuger)) stöter vi på tre öbor, A, B och C.
Vi frågar: "Hur många av er är kungar?" A svarar "En", detsamma säger B.
Avgör för var och en av A, B och C om han/hon är kung eller narr.

2 Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas)

$$\vdash\ (A \to B) \vee (B \to A).$$

3 Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna)

$$\exists x\,(Px \vee Qx),\ \forall x\,(Px \to Qx)\ \vdash\ \exists x\,Qx.$$

4 Visa att

$$\forall x\,Px \to \exists y\,Qy\ \nvDash\ \forall x\,\exists y\,(Px \to Qy).$$

5 Översätt följande till predikatlogiska sentenser:
1. "Någon potatis har ätits av någon gris, trots att den ansågs oätlig av någon gris."
2. "De potatisar som ansågs oätliga av minst två grisar, ansågs oätliga av alla grisar."
Använd följande lexikon:
Gx : Ref(x) är en gris, Px : Ref(x) är en potatis,
Hxy : Ref(x) har ätit Ref(y), Axy : Ref(x) ansåg att Ref(y) var oätlig.

6 Använd tablåmetoden för att avgöra om

$$\forall x\,Px\ \vee Qa,\ \exists x\,(Px \to Qx)\ \vDash\ \exists x\,Qx.$$

Om det inte gäller, använd tablån för att finna ett motexempel.

7 Är följande slutledning korrekt? Om så är fallet, visa detta med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna), om så inte är fallet, visa detta medelst en lämplig tolkning.

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,((Rxy\,\&\,Ryz) \to Rzx),\ \forall x\,\exists y\,Rxy\ \vDash\ \forall y\,\exists x\,Rxy.$$

Vänd!

8 Kan det finnas någon binär relation R på en ändlig domän, som är irreflexiv (dvs $\forall x \sim Rxx$), asymmetrisk (dvs $\forall x \forall y (Rxy \rightarrow \sim Ryx)$), intransitiv (dvs $\forall x \forall y \forall z ((Rxy \,\&\, Ryz) \rightarrow \sim Rxz)$) och seriell (dvs $\forall x \exists y\, Rxy$)?
Ge exempel eller motbevis.

9 Betrakta påståendena α) och β) om sentenserna p, q:

$$\alpha)\ p \vDash q \qquad\qquad \beta)\ \nvDash p \,\&\! \sim q.$$

α) säger alltså att q är en logisk följd av p, medan β) säger att $p \,\&\! \sim q$ inte är en logiskt giltig sentens.
Gäller $\alpha) \Rightarrow \beta)$? (Dvs gäller för alla sentenser p, q att om α är sann så är också β sann?) Gäller $\beta) \Rightarrow \alpha)$? Motivera ordentligt.

10 Visa att $\forall x \forall y\ (x + y = 0 \rightarrow y = 0)$ följer ur Peanos axiom.
Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.
(Ledning: Visa först för godtyckliga a att $\forall y\ (a + y = 0 \rightarrow y = 0)$).

Del B

Denna del ger, om del A är godkänd, betyg fyra för 4-7 poäng och betyg fem för 8-12 poäng. Uppgifterna kan ge 2 poäng var.
Uppgifterna är troligen inte ordnade efter svårighet.
Var noga med att motivera dina svar!

11 Visa med naturlig deduktion i varianten S5 av modallogik (dvs den modallogik som presenteras i kursboken) att

$$\vdash_{S5}\ \Diamond (A \rightarrow \Box A)$$

SI-reglerna på formelbladet får användas.

12 Visa att i modal predikatlogik (fortfarande variant S5)

$$\Box \forall x (Px \vee Qx),\ \ \Box \exists x \sim Px,\ \ \Diamond \exists x (Px \,\&\, Qx)\ \ \nvDash_{S5}\ \ \Box \exists x \exists y\ x \neq y$$

13 Visa att i intuitionistisk logik $\quad \nvDash_I\ ((A \vee \sim A) \rightarrow B) \rightarrow B.$

14 Visa att i intuitionistisk logik $\quad \vDash_I\ ((A \vee \sim A) \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim B.$
(Valfri metod. Ange innehållet i använda satser).

15 Låt $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ vara en oändlig sentensmängd i första ordningens predikatlogik, sådan att för varje tolkning finns något p_i som är sant i denna. Visa att det finns något m sådant att sentensen $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_m$ är logiskt giltig.
(Tips: betrakta sentensmängden $\{\sim p_1, \sim p_2, \sim p_3, \ldots\}$).

16 Är följande sentens i andra ordningens predikatlogik en tautologi, betingat sann eller en kontradiktion? Motivera ditt svar ordentligt.

$$\exists u \exists X \forall x (Xx \leftrightarrow \sim Xu(x))$$

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.