KTH Matematik
B.Ek

Tentamen i 5B1928, LOGIK för D (och IT)
Måndagen den 29 maj 2006

Skrivtid: 8.00–13.00.

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Tillåtet hjälpmedel: Utdelat formelblad.
För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

För godkänt krävs 13 poäng på del A. Den som har 11 eller 12 poäng på del A har rätt att delta i en kompletteringsskrivning för betyg 3.
Uppgifterna ger maximalt 2 poäng var.
Kontrollskrivningar från högst en av höstterminen 2005 och vårterminen 2006 kan tillgodoräknas. Den som klarat kontrollskrivning nr i ($i = 1, 2, 3$) får automatiskt 2 poäng på uppgifterna nr $2i - 1$ och $2i$ (och skall inte göra dem).
Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du klarat.

Del A

1) Nära Knarrön ligger den lilla Gnisslön, där invånarnas förhållande till sanningen egendomligt nog är motsatt knarröbornas. På båda öarna är varje öbo precis endera av kung och narr, men narrar från Gnisslön talar sanning och kungar från Gnisslön ljuger. Med dem från Knarrön är det ju tvärtom.
A har besök i sitt hem på Knarrön av B (från Knarrön eller Gnisslön).
A presenterar sin gäst och säger: ”B kommer från Gnisslön.”
B säger: ”Om jag kommer från Knarrön är A kung.”
Kan man säkert avgöra om B är kung eller narr? I så fall, vilkendera är hon?

2) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas)

$$(A \vee B) \to (B \vee C),\ \sim(A \to C)\ \vdash\ B.$$

3) Använd tablåmetoden för att avgöra om

$$\forall x\, \exists y\, (Fx \to Gy)\ \vDash\ \sim \exists x\, Fx \vee \exists y\, Gy.$$

Om det inte gäller, använd tablån för att finna ett motexempel.

4) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas)

$$\exists x\, \exists y\, (Fx \to Gy)\ \vdash\ \forall x\, Fx \to \exists x\, Gx.$$

5) Översätt följande till predikatlogiska sentenser:
1. ”Minst två uppgifter på tentan är svårare än Peanoproblemet.”
2. ”Om en uppgift på tentan är lättare än Peanoproblemet är den lättast på tentan (dvs inte svårare än någon uppgift på tentan).”
Använd följande lexikon. Ux : ”Ref(x) är en uppgift på tentan”, Sxy : ”Ref(x) är svårare än Ref(y)”, Ref(a) är Peanoproblemet.

6) Visa att

$$\forall x\, \exists y\, (Pxy \to Fy)\ \nvDash\ \forall x\, \exists y\, Pxy \to \exists y\, Fy.$$

Vänd!

7) Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna)

$$\forall x\,\exists y\,Pxy,\ \forall x\,\forall y\,(\exists z\,(Pxz\ \&\ Pzy)\rightarrow y=x)\ \vdash\ \forall x\,\forall y\,(Pxy\rightarrow Pyx).$$

8) Vilka av egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet måste (den binära relationen $\mathcal{R}$, tolkningen av) R ha, i en tolkning som gör

$$\forall x\,\forall y\,((Fx\rightarrow Fy)\rightarrow Rxy)$$

sann? Lösningen får vara informell, men den skall vara klar och väl motiverad och det skall framgå vad var och en av de tre egenskaperna innebär.

9) Betrakta påståendena α) och β) om sentenserna p och q:

$$\alpha)\ \ p\not\models q \qquad \beta)\ \ p\rightarrow q\ \models\ \curlywedge.$$

α) säger alltså att q inte är en logisk följd av p, medan β) säger att $p\rightarrow q$ inte är satisfierbar. Gäller $\alpha)\ \Rightarrow\ \beta)$? (Dvs gäller för alla sentenser p, q att om α är sann så är också β sann?) Gäller $\beta)\ \Rightarrow\ \alpha)$? Motivera ordentligt.

10) Visa att det följer ur Peanos axiom att $\forall x\,\forall y\,S(x+y)=S(x)+y$. Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande. [Ledning: Visa först $\forall y\,S(a+y)=S(a)+y$ för godtyckligt a.]

Del B

Denna del ger, om del A är godkänd, betyg fyra för 4-7 poäng och betyg fem för 8-12 poäng. Uppgifterna kan ge 2 poäng var.
Uppgifterna är troligen inte ordnade efter svårighet.
Var noga med att motivera dina svar!

11) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas) i varianten S5 av modallogik (den modallogik som presenteras i kursboken) att

$$\Diamond\,(\Box\,A\rightarrow B)\ \vdash_{S5}\ \Diamond\,(A\rightarrow\Diamond\,B).$$

12) Visa att i modal predikatlogik (fortfarande variant S5)

$$\Box\,\forall x\,\Box\,\forall y\,Qxy\ \not\models_{S5}\ \Diamond\,\exists x\,\Diamond\,\exists y\,\Box\,Qxy.$$

13) Visa **med resonemang** att i intuitionistisk logik

$$(A\rightarrow B)\vee\sim C\ \models_I\ (A\,\&\,C)\rightarrow B.$$

Sambandet skall visas med resonemang om intuitionistiska tolkningar, det är alltså **inte** tillåtet att använda t.ex. naturlig deduktion.

14) Visa att i intuitionistisk logik

$$\exists x\,(\forall y\,Fy\rightarrow Gx)\ \not\models_I\ \exists y\,(Fy\rightarrow\exists x\,Gx).$$

15) Låt $\{p_1, p_2, \ldots\}$ vara en (oändlig) mängd sentenser i första ordningens predikatlogik, sådan att för varje tolkning finns $k<l$ (vilka kan bero av tolkningen) så att p_k är sann och p_l falsk i tolkningen. Visa att det finns ett tal n, så att mängden $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ har samma egenskap.

16) Betrakta sentensen $\sim\exists u\,\exists X\,\forall x\,(u(u(x))=x\ \&\ (Xx\leftrightarrow\sim Xu(x)))$ i andra ordningens predikatlogik. För vilka tolkningar är den sann? Motivera väl.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.