KTH Matematik
B.Ek

Lösningar tentamen 5B1928 Logik för D (och IT), 29 maj 2006

1) Vi vet att A är från Knarrön och att A och B säger:
A: ”B kommer från Gnisslön.”
B: ”Om jag kommer från Knarrön är A kung.”
Vi skall utröna om det går att avgöra vad B är, och vad hon är.
Om A är kung (från Knarrön, ju) är det han säger sant, så B kommer från Gnisslön. Eftersom B:s påstående i detta fall är sant (A är kung) är hon då **narr**.
Om A är narr (fortfarande från Knarrön) ljuger han, så B kommer från Knarrön. Eftersom B:s påstående i detta fall är falskt (B från Knarrön, A narr) är hon också i det fallet **narr**.
Så **Svar: Ja, det kan avgöras, hon är narr.**
Formellt: Om $A(B)$ betyder att A (B) är kung och K att B är från Knarrön, får vi med t.ex. sanningsvärdestabell att $A \leftrightarrow \sim K$, $(B \leftrightarrow K) \leftrightarrow (K \rightarrow A) \vDash \sim B$.
(Man kan inte avgöra om A är kung (och B från Gnisslön) eller narr (och B från Knarrön).)

2) Att visa: $(A \vee B) \rightarrow (B \vee C)$, $\sim(A \rightarrow C) \vdash B$.
Idé: Den andra premissen ger $A \mathbin{\&} \sim C$. A ger $A \vee B$, så med premiss 1 $B \vee C$. Med $\sim C$ ger det B.

1	(1)	$(A \vee B) \rightarrow (B \vee C)$	premiss	
2	(2)	$\sim(A \rightarrow C)$	premiss	
2	(3)	$A \mathbin{\&} \sim C$	2	SI(Neg-Imp)
2	(4)	A	3	&E
2	(5)	$A \vee B$	4	$\vee$I
1,2	(6)	$B \vee C$	1,5	$\rightarrow$E
2	(7)	$\sim C$	3	&E
1,2	(8)	B	6,7	SI(DS)

Slutsatsen på rad (8) beror bara av premisserna på raderna (1) och (2), **saken är klar**.

3) För att avgöra om $\forall x\, \exists y\, (Fx \rightarrow Gy) \vDash \sim\exists x\, Fx \vee \exists y\, Gy$ söker vi motexempel (tolkningar som gör premissen sann och slutsatsen falsk):

I tablån växlar de tre faserna:

1. Satslogiska	1,2 ;	- ;	9
2. $\mathbb{T}\exists, \mathbb{F}\forall$	3 ;	6 ;	
3. $\mathbb{T}\forall, \mathbb{F}\exists$	4,5 ;	7,8 ;	

Tablån sluter sig, så **slutledningen är giltig.**

$\mathbb{T}:$	$\forall x\, \exists y\, (Fx \rightarrow Gy)$	a_4, b_7
$\mathbb{F}:$	$\sim\exists x\, Fx \vee \exists y\, Gy$	$\surd_1$
$_1\mathbb{F}:$	$\sim\exists x\, Fx$	$\surd_2$
$_1\mathbb{F}:$	$\exists y\, Gy$	a_5, b_8
$_2\mathbb{T}:$	$\exists x\, Fx$	$\surd_{3:a}$
$_3\mathbb{T}:$	Fa	
$_4\mathbb{T}:$	$\exists y\, (Fa \rightarrow Gy)$	$\surd_{6:b}$
$_5\mathbb{F}:$	Ga	
$_6\mathbb{T}:$	$Fa \rightarrow Gb$	$\surd_9$
$_7\mathbb{T}:$	$\exists y\, (Fb \rightarrow Gy)$	
$_8\mathbb{F}:$	Gb	

$_9\mathbb{F}: \; Fa$ $\qquad\qquad$ $_9\mathbb{T}: \; Gb$

$\times \qquad\qquad\qquad \times$

4) Att visa: $\exists x\, \exists y\, (Fx \rightarrow Gy) \vdash \forall x\, Fx \rightarrow \exists x\, Gx$.
Idé: Vi antar $\forall x\, Fx$ för att visa $\exists x\, Gx$. Enligt premissen gäller $Fa \rightarrow Gb$ för några a, b (dvs de antas för $\exists$E). Fa fås ur antagandet, så Gb och därmed $\exists x\, Gx$.

1	(1)	$\exists x\, \exists y\, (Fx \rightarrow Gy)$	premiss		
2	(2)	$\forall x\, Fx$	antagande		
3	(3)	$\exists y\, (Fa \rightarrow Gy)$	antagande		
4	(4)	$Fa \rightarrow Gb$	antagande		
2	(5)	Fa	2	$\forall$E	
2,4	(6)	Gb	4,5	$\rightarrow$E	
2,4	(7)	$\exists x\, Gx$	6	$\exists$I	
2,3	(8)	$\exists x\, Gx$	3,4,7	$\exists$E	[b inte i (3),(7),(2)]
1,2	(9)	$\exists x\, Gx$	1,3,8	$\exists$E	[a inte i (1),(8),(2)]
1	(10)	$\forall x\, Fx \rightarrow \exists x\, Gx$	2,9	$\rightarrow$I	

Slutsatsen på rad (10) beror bara av premissen på rad (1), så **saken är klar**.

5) 1. ”Minst två uppgifter på tentan är svårare än Peanoproblemet.”
dvs ”Det finns x och y så att x och y är uppgifter på tentan, x och y är olika och x och y är båda svårare än Peanoproblemet”,
dvs ”Det finns x och y så att Ux och Uy, $x \neq y$ och Sxa och Sya”,
så **svar**: $\boldsymbol{\exists x\, \exists y\, (Ux \,\&\, Uy \,\&\, x \neq y \,\&\, Sxa \,\&\, Sya)}$
(mer precist t.ex.: $\exists x\, \exists y\, (((Ux \,\&\, Uy) \,\&\, x \neq y) \,\&\, (Sxa \,\&\, Sya)))$
2. ”Om en uppgift på tentan är lättare än Peanoproblemet är den lättast på tentan (dvs inte svårare än någon uppgift på tentan).”
dvs ”För alla x gäller att om x är en uppgift på tentan och Peanoproblemet är svårare än x, så finns inte y som är en uppgift på tentan och sådan att x är svårare än y”
så **svar**: $\boldsymbol{\forall x\, ((Ux \,\&\, Sax) \rightarrow \sim \exists y\, (Uy \,\&\, Sxy))}$
I båda fallen är förstås logiskt ekvivalenta varianter möjliga.

6) För att visa att $\forall x\, \exists y\, (Pxy \rightarrow Fy) \;\nvDash\; \forall x\, \exists y\, Pxy \rightarrow \exists y\, Fy$ skall vi finna en tolkning som gör premissen sann och den tänkta slutsatsen falsk.
$\forall x\, \exists y\, Pxy \rightarrow \exists y\, Fy$ är falsk precis om $\forall x\, \exists y\, Pxy$ är sann och $\exists y\, Fy$ är falsk, så $\mathrm{Ext}(F) = \varnothing$.
$\forall x\, \exists y\, (Pxy \rightarrow Fy)$ sann betyder då precis att $\forall x\, \exists y\, (Pxy \rightarrow \curlywedge)$, dvs $\forall x\, \exists y\, \sim Pxy$, är sann.
Vi leds till tolkningen (med minimal domän):
$D = \{\alpha, \beta\}, \quad \mathrm{Ext}(P) = \{\langle \alpha, \alpha \rangle, \langle \beta, \alpha \rangle\}, \quad \mathrm{Ext}(F) = \varnothing.$
Den gör ju

- $\boldsymbol{\forall x\, \exists y\, (Pxy \rightarrow Fy)}$ **sann**, ty $\exists y\, (Pay \rightarrow Fy), \exists y\, (Pby \rightarrow Fy)$ båda sanna,
  ty $Pab \rightarrow Fb, Pbb \rightarrow Fb$ båda sann, ty Pab, Pbb båda falska
  (ty $\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \beta \rangle \notin \mathrm{Ext}(P)$)
- $\boldsymbol{\forall x\, \exists y\, Pxy \rightarrow \exists y\, Fy}$ **falsk**, ty
  $\forall x\, \exists y\, Pxy$ sann, ty $\exists y\, Pay, \exists y\, Pby$ båda sanna, ty Paa, Pba båda sanna
  (ty $\langle \alpha, \alpha \rangle, \langle \beta, \alpha \rangle \in \mathrm{Ext}(P)$) och
  $\exists y\, Fy$ falsk, ty $\mathrm{Ext}(F) = \varnothing$,

så **saken är klar.**

7) Att visa: $\forall x\, \exists y\, Pxy,\ \forall x\, \forall y\, (\exists z\, (Pxz \,\&\, Pzy) \rightarrow y = x) \;\vdash\; \forall x\, \forall y\, (Pxy \rightarrow Pyx)$.
Idé: Antag Pab (för att visa Pba och så använda $\rightarrow$I och $\forall$I två ggr). Enligt premiss 1 finns c med Pbc (dvs antag det för $\exists$E), premiss 2 ger $c = a$, så Pba.

1	(1)	$\forall x\, \exists y\, Pxy$	premiss		
2	(2)	$\forall x\, \forall y\, (\exists z\, (Pxz \,\&\, Pzy) \rightarrow y = x)$	premiss		
3	(3)	Pab	antagande		
1	(4)	$\exists y\, Pby$	1	$\forall$E	
5	(5)	Pbc	antagande		
3,5	(6)	$Pab \,\&\, Pbc$	3,5	&I	
3,5	(7)	$\exists z\, (Paz \,\&\, Pzc)$	6	$\exists$I	
2	(8)	$\forall y\, (\exists z\, (Paz \,\&\, Pzy) \rightarrow y = a)$	2	$\forall$E	
2	(9)	$\exists z\, (Paz \,\&\, Pzc) \rightarrow c = a$	8	$\forall$E	
2,3,5	(10)	$c = a$	9,7	$\rightarrow$E	
2,3,5	(11)	Pba	10,5	=E	
2,5	(12)	$Pab \rightarrow Pba$	3,11	$\rightarrow$I	
1,2	(13)	$Pab \rightarrow Pba$	4,5,12	$\exists$E	[c inte i (4),(12),(2)]
1,2	(14)	$\forall y\, (Pay \rightarrow Pya)$	13	$\forall$I	[b inte i (1),(2)]
1,2	(15)	$\forall x\, \forall y\, (Pxy \rightarrow Pyx)$	14	$\forall$I	[a inte i (1),(2)]

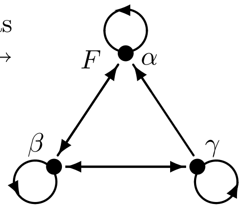
Slutsatsen på rad (15) beror bara av premisserna på rad (1) och (2), **saken är klar**.

8) Se nästa sida.

9) Vi har: $\alpha)\ p \nvDash q, \quad \beta)\ p \rightarrow q \,\vDash\, \curlywedge$.
α) betyder precis att det finns **minst en** tolkning som gör p sann och q falsk.
β) betyder precis att det inte finns någon tolkning som gör $p \rightarrow q$ sann, dvs att p är sann och q falsk i **varje** tolkning.
Tydligen gäller $\beta \;\Rightarrow\; \alpha$ (ty det finns tolkningar).
Exemplet $p : A,\ q : \curlywedge$, som gör α) sann ($A \nvDash \curlywedge$ gäller) men β) falsk ($A \rightarrow \curlywedge \,\vDash\, \curlywedge$, dvs $\sim A \vDash \curlywedge$ gäller inte) visar att $\alpha) \;\not\Rightarrow\; \beta)$.
Så **svar:** $\boldsymbol{\alpha) \not\Rightarrow \beta), \quad \beta) \Rightarrow \alpha).}$

8) Den givna sentensen $\forall x\, \forall y\, ((Fx \to Fy) \to Rxy)$ är tydligen sann precis om Rst är sann för alla σ, τ med $\sigma \notin \text{Ext}(F)$ eller $\tau \in \text{Ext}(F)$ (eller båda), men Rst **kan** också vara sann då $\sigma \in \text{Ext}(F)$ och $\tau \notin \text{Ext}(F)$.
Relationen $\mathcal{R}$ som gör den givna sentensen sann är

- **reflexiv**, dvs $\forall x\, Rxx$ är sann, ty för godtyckligt a gäller förstås (oberoende av F) att $Fa \to Fa$ och enligt sentensen $(Fa \to Fa) \to Raa$, så Raa
- **inte (säkert) symmetrisk**, dvs $\forall x\, \forall y\, (Rxy \to Ryx)$ behöver inte vara sann
- **inte (säkert) transitiv**, dvs $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy\ \&\ Ryz) \to Rxz)$ behöver inte heller vara sann



En tolkning som varken gör $\mathcal{R}$ symmetrisk eller transitiv ges av (se figuren): $D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\text{Ext}(F) = \{\alpha\}$, $\quad \text{Ext}(R) = \{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle, \langle\beta,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\gamma,\alpha\rangle, \langle\gamma,\beta\rangle, \langle\gamma,\gamma\rangle\}$.
Den gör den givna sentensen sann, men varken $Rca \to Rac$ eller $(Rab\ \&\ Rbc) \to Rac$, ty Rca, Rab, Rbc är sanna i tolkningen, men inte Rac.
Svar: $\mathcal{R}$ är reflexiv, men varken säkert symmetrisk eller transitiv.

9) Se föregående sida.

10) Låt ϕy vara formeln $S(a + y) = S(a) + y$. Vi skall först visa $\forall y\, \phi y$.
$\phi 0$ gäller eftersom $S(0 + 0) \overset{\text{P3}}{=} S(0) \overset{\text{P3}}{=} S(0) + 0$.
Antag att ϕb gäller, dvs $S(a + b) = S(a) + b$.
Då fås $S(a + S(b)) \overset{\text{P4}}{=} S(S(a + b)) \overset{\phi b}{=} S(S(a) + b) \overset{\text{P4}}{=} S(a) + S(b)$, dvs $\phi S(b)$.
Därmed gäller $\phi b \to \phi S(b)$ för alla b, så $\forall x\, (\phi x \to \phi S(x))$.
Så $\phi 0\ \&\ \forall x\, (\phi x \to \phi S(x))$ gäller och enligt axiom (en alfabetisk variant av) P7 (med $n = 0$) gäller då $\forall y\, \phi y$, dvs $\forall y\, S(a + y) = S(a) + y$. Eftersom detta gäller för godtyckligt a fås ($\forall$I) det önskade $\boldsymbol{\forall x\, \forall y\, S(x + y) = S(x) + y}$, så **saken är klar.**

11) Vi skall visa att $\Diamond(\Box A \to B) \vdash_{S5} \Diamond(A \to \Diamond B)$.
Idé (semantiskt:) **Om** A är falsk i någon värld, är $A \to \Diamond B$ sann där, så slutsatsen. **Annars** är $\Box A$ sann (i varje värld) och enligt premissen B sann i någon värld, så $\Diamond B$ och $A \to \Diamond B$ sanna (i alla världar), så slutsatsen.
Tvåfallsresonemang, så beviset bör ske genom att anta motsatsen och sikta mot DN.

1	(1)	$\Diamond(\Box A \to B)$	premiss		
2	(2)	$\sim\Diamond(A \to \Diamond B)$	antagande		
3	(3)	$\sim A$	antagande		
3	(4)	$A \to \Diamond B$	3	SI(PMI$_2$)	
3	(5)	$\Diamond(A \to \Diamond B)$	4	$\Diamond$I	
2,3	(6)	$\curlywedge$	2,5	$\sim$E	
2	(7)	$\sim\sim A$	3,6	$\sim$I	
2	(8)	A	7	DN	
2	(9)	$\Box A$	8	$\Box$I	[(2) fullt modaliserad]
10	(10)	$\Box A \to B$	antagande		
2,10	(11)	B	10,9	$\to$E	
2,10	(12)	$\Diamond B$	11	$\Diamond$I	
2,10	(13)	$A \to \Diamond B$	12	SI(PMI$_1$)	
2,10	(14)	$\Diamond(A \to \Diamond B)$	13	$\Diamond$I	
2,10	(15)	$\curlywedge$	2,14	$\sim$E	
1,2	(16)	$\curlywedge$	1,10,15	$\Diamond$E	[(15),(2) fullt modaliserade]
1	(17)	$\sim\sim\Diamond(A \to \Diamond B)$	2,16	$\sim$I	
1	(18)	$\Diamond(A \to \Diamond B)$	17	DN	

Slutsatsen på sista raden beror bara av premissen på rad (1), så **saken är klar**.

12) Vi skall visa att $\Box\,\forall x\,\Box\,\forall y\,Qxy\ \nvDash_{S5}\ \Diamond\,\exists x\,\Diamond\,\exists y\,\Box\,Qxy$.
Vi söker alltså en tolkning som gör premissen sann och den tänkta slutsatsen falsk.
Allmänt gäller, eftersom varje element i D existerar i någon värld, att om ϕx är en **fullt modaliserad** formel betyder $\Box\,\forall x\,\phi x$ precis att ϕs är sann (i en värld, således i alla världar) för alla $\sigma \in D$. På motsvarande sätt betyder $\Diamond\,\exists x\,\phi x$ att ϕs är sann (i alla världar) för något $\sigma \in D$.
$\Box\,\forall x\,\Box\,\forall y\,Qxy$ sann betyder då precis att $\Box\,\forall y\,Qsy$ är sann för alla $\sigma \in D$, dvs för varje värld v skall $\langle\sigma,\tau\rangle \in v[Q]$ för alla $\sigma \in D, \tau \in v(D)$.
$\Diamond\,\exists x\,\Diamond\,\exists y\,\Box\,Qxy$ sann betyder i stället att $\Box\,Qst$ är sann (dvs $\langle\sigma,\tau\rangle \in v[Q]$ för alla världar v) för några $\sigma,\tau \in D$.
Tolkningen $\mathcal{W} = \{w^*, u\},\ D = \{\alpha\},\ w^*(D) = \{\alpha\},\ u(D) = \varnothing, w^*[Q] = \{\langle\alpha,\alpha\rangle\},\ u[Q] = \varnothing$ visar påståendet, ty den gör ($u[\forall x\,\phi x] = 1, u[\exists x\,\phi x] = 0$ för alla ϕx och)

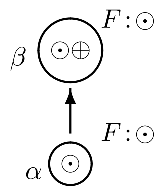
- $\boldsymbol{\Box\,\forall x\,\Box\,\forall y\,Qxy}$ **sann**, ty $w^*[\Box\,\forall x\,\Box\,\forall y\,Qxy] = 1$, ty $u[\forall x\,\Box\,\forall y\,Qxy] = 1$
  och $w^*[\forall x\,\Box\,\forall y\,Qxy] = 1$, ty ($w^*(D) = \{\alpha\}$ och) $w^*[\Box\,\forall y\,Qay] = 1$,
  ty $u[\forall y\,Qay] = w^*[\forall y\,Qay] = 1$, ty $w^*[Qaa] = 1$ (ty $\langle\alpha,\alpha\rangle \in w^*[Q]$)
- $\boldsymbol{\Diamond\,\exists x\,\Diamond\,\exists y\,\Box\,Qxy}$ **falsk**, ty $w^*[\Diamond\,\exists x\,\Diamond\,\exists y\,\Box\,Qxy] = 0$, ty $u[\exists x\,\Diamond\,\exists y\,\Box\,Qxy] = 0$
  och $w^*[\exists x\,\Diamond\,\exists y\,\Box\,Qxy] = 0$, ty ($w^*(D) = \{\alpha\}$ och) $w^*[\Diamond\,\exists y\,\Box\,Qay] = 0$,
  ty $u[\exists y\,\Box\,Qay] = w^*[\exists y\,\Box\,Qay] = 0$, ty $w^*[\Box\,Qaa] = 0$, ty $u[Qaa] = 0$, ty $u[Q] = \varnothing$

Saken är klar. (Man kan också ha två element i D och klara sig utan tomma domäner.)

13) Vi skall visa att $(A \to B) \vee {\sim}C\ \vDash_I\ (A\,\&\,C) \to B$.
Låt som vanligt S vara mängden av informationstillstånd, med rot α och ordning $\leq$, i en intuitionistisk tolkning.
Antag att $\alpha \Vdash\ (A \to B) \vee \sim C$, dvs $\alpha \Vdash\ A \to B$ eller $\alpha \Vdash {\sim}\,C$. Om vi då visar att $\alpha \Vdash\ (A\ \&\ C) \to B$ är saken klar. Det gäller således att visa att om $\sigma \Vdash\ A\ \&\ C$ för något $\sigma \in S$ så gäller också $\sigma \Vdash\ B$.
Antag alltså också $\sigma \Vdash\ A\,\&\,C$, dvs $\sigma \Vdash\ A$ och $\sigma \Vdash\ C$. Det senare betyder att $\alpha \nVdash {\sim}C$, så $\alpha \Vdash\ A \to B$ och med $\sigma \Vdash\ A$ ger det $\sigma \Vdash\ B$.
Saken är klar, vi har visat $(A \to B) \vee {\sim}C\ \vDash_I\ (A\,\&\,C) \to B$.

14) Vi skall visa att $\exists x\,(\forall y\,Fy \to Gx)\ \nvDash_I\ \exists y\,(Fy \to \exists x\,Gx)$ genom att finna en tolkning så att $\alpha \Vdash\ \exists x\,(\forall y\,Fy \to Gx)$ och $\alpha \nVdash\ \exists y\,(Fy \to \exists x\,Gx)$. Den senare ger att $\alpha \nVdash\ \exists x\,Gx$, så enligt den förra $\alpha \nVdash\ \forall y\,Fy$ (trots att $\alpha \nVdash {\sim}F\circledcirc$, alla $\circledcirc \in dom(\alpha)$).
Betrakta tolkningen (se fig.) $S = \{\alpha,\beta\}$, $\leqslant = \{\langle\alpha,\beta\rangle\}$,
$dom(\alpha) = \{\odot\}$, $dom(\beta) = \{\odot,\oplus\}$, $warr(\alpha) = warr(\beta) = \{\langle\text{‘}F\text{’},\odot\rangle\}$.
Den ger:

- $\alpha \Vdash\ \exists x\,(\forall y\,Fy \to Gx)$, ty $\alpha \Vdash\ \forall y\,Fy \to G\odot$,
  ty $\alpha,\beta \nVdash\ \forall y\,Fy$, ty $\beta \nVdash\ F\oplus$ (och $\oplus \in dom(\beta)$)
- $\alpha \nVdash\ \exists y\,(Fy \to \exists x\,Gx)$, ty $\alpha \nVdash\ F\odot \to \exists x\,Gx$,
  ty $\alpha \Vdash\ F\odot$ och $\alpha \nVdash\ \exists x\,Gx$, ty $\alpha \nVdash\ G\odot$ (och $dom(\alpha) = \{\odot\}$)



Så **saken är klar**, vi har visat $\exists x\,(\forall y\,Fy \to Gx)\ \nvDash_I\ \exists y\,(Fy \to \exists x\,Gx)$.

15) Vi vet att för varje tolkning finns $k < l$ så att p_k är sann och p_l falsk i tolkningen, dvs $p_k \to p_l$ är falsk. Låt $\Gamma = \{p_i \to p_j \mid i < j\}$. Förutsättningen betyder precis att Γ saknar modell. Enligt kompakthetssatsen finns en ändlig $\Gamma' \subseteq \Gamma$ som också saknar modell. Om n är det största talet som förekommer som index bland (det ändliga antalet) sentenser i Γ', så betyder det att mängden $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ har den önskade egenskapen.
Saken är klar.

16) Betrakta först $\exists u\,\exists X\,\forall x\,(u(u(x)) = x\ \&\ (Xx \leftrightarrow {\sim}Xu(x)))$ (den givna sentensen är negationen av denna).
Den är sann i en tolkning (dvs för en viss domän D) precis om sentensen i första ordningens logik $\forall x\,(f(f(x)) = x\,\&\,(Px \leftrightarrow {\sim}Pf(x)))$ är sann för några tolkningar av funktionssymbolen f och predikatsymbolen P.
Den säger precis att $\mathrm{Ref}(f)$ ger en ”hopparning” av elementen i $\mathrm{Ext}(P)$ med dem i $D \smallsetminus \mathrm{Ext}(P)$. Detta är alltid möjligt om D är oändlig (”tag två element i taget”, låt f avbilda dem på varandra och låt precis ett av dem ligga i $\mathrm{Ext}(P)$) och för ändliga D precis om $|D|$ (antalet element i D) är ett jämnt tal (ses på samma sätt), så **svar: Den givna sentensen är sann precis om domänen D har ett (ändligt) udda antal element.**