KTH Matematik
B.Ek

Tentamen i 5B1928, LOGIK för D (och IT)
måndagen den 21 maj 2007

Skrivtid: 8.00–13.00.

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Tillåtet hjälpmedel: Utdelat formelblad.
För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

För godkänt krävs 13 poäng på del A. Den som har 11 eller 12 poäng på del A har rätt att delta i en kompletteringsskrivning för betyg 3.
Uppgifterna ger maximalt 2 poäng var.
Kontrollskrivningar från högst en av höstterminen 2006 och vårterminen 2007 kan tillgodoräknas. Den som klarat kontrollskrivning nr i ($i = 1, 2, 3$) får automatiskt 2 poäng på uppgifterna nr $2i - 1$ och $2i$ (och skall inte göra dem).
Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du klarat.

Del A

1) På Knarrön (där ju var och en antingen är kung (och alltid talar sanning) eller narr (och alltid ljuger)) träffar vi A och B, som är gifta med varandra.
Kvinnan säger: ”Min man och A är samma sort.”
Mannen lägger till: ”Om min fru är kung är A narr.”
Avgör vilka av följande frågor som kan besvaras och ge svaren på dem.
Vem av de båda är A och vem är B? Vilken sort är A? Vilken sort är B?
(Med ”sort” avses här förstås kung eller narr.)

2) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas)

$$A \to ((B \,\&\, C) \vee {\sim} B) \ \vdash {\sim} C \to {\sim} (A \,\&\, B).$$

3) Använd tablåmetoden för att avgöra om

$$\forall x\, (Fx \to Gx) \ \vDash \ \exists x\, Fx \to \forall y\, Gy.$$

Om det inte gäller, använd tablån för att finna ett motexempel.

4) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas)

$$\forall x\, (Fx \to \exists y\, Gy) \ \vdash \ {\sim} \exists x\, \forall y\, (Fx \,\&\, {\sim} Gy).$$

5) Översätt 1. och 2. till predikatlogiska sentenser:
1. ”Maria tycker om alla logiker som tycker om någon.”
2. ”Alla som inte är logiker och som tycker om minst två logiker, tycker också om någon som inte är logiker.”
Använd följande lexikon Maria är Ref(m), Lx : ”Ref(x) är logiker”, Txy : ”Ref(x) tycker om Ref(y)”

6) Visa att $\exists x\, \forall y\, Pxy,\ \forall x\, \exists y\, (x \neq y \leftrightarrow (Pxy \leftrightarrow Pyx)) \ \nvDash \ \forall x\, \exists y\, (Pxy \,\&\, Pyx)$.

7) Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna)

$$\forall x\, \forall y\, (Rxy \to Rxx),\ \exists x\, \forall y\, (x \neq y \leftrightarrow Rxy) \ \vdash \ \exists x\, \forall y\ x = y.$$

Vänd!

8) Vilka av egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet måste (den binära relationen $\mathcal{R}$, tolkningen av) R ha, i en tolkning som gör

$$\forall x\,\forall y\,((Qxy \to Qyx) \leftrightarrow Rxy)$$

sann? Lösningen får vara informell, men den skall vara klar och väl motiverad och det skall framgå vad var och en av de tre egenskaperna innebär.

9a) Om sentenserna p, q, r uppfyller $p \vDash q$ och $q \nvDash r$, måste då $p \nvDash r$?
b) Om de uppfyller $p \vDash q$ och $p \nvDash r$, måste då $q \nvDash r$?
Svaren skall förstås motiveras.

10) Visa att det följer ur Peanos axiom att $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x + z = y + z \to x = y)$.
Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.
[Ledning: Visa först $\forall z\,(a + z = b + z \to a = b)$ för godtyckliga a, b.]

Del B

Denna del ger, om del A är godkänd, betyg fyra för 4-7 poäng och betyg fem för 8-12 poäng. Uppgifterna kan ge 2 poäng var.
Uppgifterna är troligen inte ordnade efter svårighet.
Var noga med att motivera dina svar!

11) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas) i varianten S5 av modallogik (den modallogik som presenteras i kursboken) att

$$\sim A,\ \Box\,(B \to \Box\,A)\ \vdash_{S5}\ \sim\Diamond\,B.$$

12) Visa att i modal predikatlogik (fortfarande variant S5)

$$\Box\,\exists x\,\exists y\,(x \neq y\ \&\ \Box\,Qxy)\ \nvDash_{S5}\ \Box\,\exists x\,\Box\,\exists y\,\Diamond\,Qxy.$$

13) Visa **med resonemang** att i intuitionistisk logik

$$(A \vee \sim A) \to \sim B\ \vDash_I\ \sim B.$$

Sambandet skall visas med resonemang om intuitionistiska tolkningar, det är alltså **inte** tillåtet att använda t.ex. naturlig deduktion.

14) Visa att i intuitionistisk logik

$$\sim\forall x\,Fx \to A\ \nvDash_I\ \forall x\,(\sim A \to Fx).$$

15) Om Γ, Δ är (ändliga eller oändliga) sentensmängder (i första ordningens predikatlogik), låt $\Gamma \vDash \Delta$ betyda att varje modell för Γ (dvs varje tolkning som gör alla sentenser i Γ sanna) gör minst en sentens i Δ sann.
Visa att om $\Gamma \vDash \Delta$, finns en sentens p så att $\Gamma \vDash p$ (i vanlig mening) och varje modell för p gör minst en sentens i Δ sann (dvs $p \vDash \Delta$).

16) Betrakta följande sentens i andra ordningens predikatlogik,

$$\forall u\,\forall X\,\exists Y(\forall x\,u(x) \neq x \to \forall x\,\forall y\,(Xxy \leftrightarrow Yxu(y))).$$

För vilka tolkningar är den sann? Motivera ditt svar.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.