KTH Matematik
B.Ek

Lösningar tentamen 5B1928 Logik för D (och IT), 21 maj 2007

1) Knarröborna A och B är ett gift par och gör följande uttalanden:
Kvinnan: ”Min man och A är samma sort.” Mannen: ”Om min fru är kung är A narr.”
Frågor att besvara: Vem är A, vem är B? Vilken sort är A? Vilken sort är B?
Om kvinnan är A, säger hon att de båda är samma sort. Det innebär (vare sig hon är kung eller narr) att mannen (som är B) är kung.
Om kvinnan är B, säger hon att A är samma sort som A, så också i det fallet är B kung.
Kvinnans utsaga ger alltså precis informationen att **B är kung**.
Om mannen är A, säger han att om B är kung (vilket är sant) är han själv narr. Om han är kung är det falskt och om han är narr är det sant. Motsägelse, så **mannen är B**, en kung.
Så B (mannen) säger sanningsenligt att om A (frun) är kung är hon narr. Så **A är narr**.
Svar: Alla tre frågorna kan besvaras.
Kvinnan är A och mannen är B. A är narr. B är kung.
Mer formellt: Om A (resp. B) är påståendet att A (resp. B) är kung får vi:
Fall 1, frun A och herrn B: $A \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$ och $B \leftrightarrow (A \rightarrow \sim A)$,
Fall 2, frun B och herrn A: $B \leftrightarrow (A \leftrightarrow A)$ och $A \leftrightarrow (B \rightarrow \sim A)$.
Sanningsvärdestabeller ger samma resultat som ovan.

2) Att visa: $A \rightarrow ((B \,\&\, C) \vee \sim B) \vdash \sim C \rightarrow \sim (A \,\&\, B)$.
Plan: Vi antar $\sim C$ och sedan $A \,\&\, B$, visar $\curlywedge$ och använder $\sim$I och $\rightarrow$I.

1	(1)	$A \rightarrow ((B \,\&\, C) \vee \sim B)$	premiss	
2	(2)	$\sim C$	antagande	
3	(3)	$A \,\&\, B$	antagande	
3	(4)	A	3	&E
1,3	(5)	$(B \,\&\, C) \vee \sim B$	1,4	$\rightarrow$E
6	(6)	$B \,\&\, C$	antagande	
6	(7)	C	6	&E
2,6	(8)	$\curlywedge$	2,6	$\sim$E
9	(9)	$\sim B$	antagande	
3	(10)	B	3	&E
3,9	(11)	$\curlywedge$	9,10	$\sim$E
1,2,3	(12)	$\curlywedge$	5,6,8,9,11	$\vee$E
1,2	(13)	$\sim (A \,\&\, B)$	3,12	$\sim$I
1	(14)	$\sim C \rightarrow \sim (A \,\&\, B)$	2,13	$\rightarrow$I

Slutsatsen på rad (14) beror bara av premissen på rad (1), **saken är klar**.

3) För att avgöra om $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx) \vDash \exists x\, Fx \rightarrow \forall y\, Gy$ söker vi motexempel (tolkningar med premissen sann, slutsatsen falsk):

I tablån växlar de tre faserna så:
1. Satslogiska 1 ; 6,7
2. $\mathbb{T}\exists, \mathbb{F}\forall$ 2,3 ;
3. $\mathbb{T}\forall, \mathbb{F}\exists$ 4,5 ;

Tablån sluter sig inte, så
slutledningen är inte giltig.
Ett **motexempel** läses av
i den öppna vägen:

	F	G
α	+	+
β	-	-

$\mathbb{T}$:	$\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$	a_4, b_5
$\mathbb{F}$:	$\exists x\, Fx \rightarrow \forall y\, Gy$	$\surd_1$
${}_1\mathbb{T}$:	$\exists x\, Fx$	$\surd_{2:a}$
${}_1\mathbb{F}$:	$\forall y\, Gy$	$\surd_{3:b}$
${}_2\mathbb{T}$:	Fa	
${}_3\mathbb{F}$:	Gb	
${}_4\mathbb{T}$:	$Fa \rightarrow Ga$	$\surd_6$
${}_5\mathbb{T}$:	$Fb \rightarrow Gb$	$\surd_7$

${}_6\mathbb{F}$: Fa $\times$ | ${}_6\mathbb{T}$: Ga

${}_7\mathbb{F}$: Fb (Öppen väg) | ${}_7\mathbb{T}$: Gb $\times$

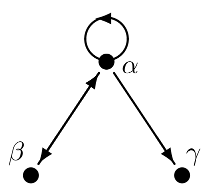
4) Att visa: $\forall x\,(Fx \rightarrow \exists y\,Gy)\ \vdash\ {\sim}\exists x\,\forall y\,(Fx\,\&\,{\sim}Gy)$.
Plan: Vi antar $\exists x\,\forall y\,(Fx\,\&\,{\sim}Gy)$ (för ~I) och sedan $\forall y\,(Fa\,\&\,{\sim}Gy)$ (för ∃E). Ur den fås dels Fa och (med premissen) $\exists y\,Gy$, dels ${\sim}Gb$, "godtyckligt" b, så $\curlywedge$.

1	(1)	$\forall x\,(Fx \rightarrow \exists y\,Gy)$	premiss		
2	(2)	$\exists x\,\forall y\,(Fx\,\&\,{\sim}Gy)$	antagande		
3	(3)	$\forall y\,(Fa\,\&\,{\sim}Gy)$	antagande		
3	(4)	$Fa\,\&\,{\sim}Gb$	3	∀E	
3	(5)	Fa	4	&E	
1	(6)	$Fa \rightarrow \exists y\,Gy$	1	∀E	
1,3	(7)	$\exists y\,Gy$	6,5	→E	
8	(8)	Gb	antagande		
3	(9)	${\sim}Gb$	4	&E	
3,8	(10)	$\curlywedge$	9,8	~E	
1,3	(11)	$\curlywedge$	7,8,10	∃E	[b inte i (7),(10),(3)]
1,2	(12)	$\curlywedge$	2,3,11	∃E	[a inte i (2),(11),(1)]
1	(13)	${\sim}\exists x\,\forall y\,(Fx\,\&\,{\sim}Gy)$	2,12	~I	

Slutsatsen på rad (13) beror bara av premissen på rad (1), **saken är klar**.
Om man störs av att ${\sim}Gb$ hämtas utanför hakarna, kan man få $Fa\,\&\,{\sim}Gb$ en extra gång innanför.

5) 1. "'Maria tycker om alla logiker som tycker om någon."
dvs "Om x är en logiker som tycker om någon, så tycker m om x",
dvs "För alla x, om Lx och det finns y så att Txy, så Tmx",
så **svar**: $\boldsymbol{\forall x\,((Lx\,\&\,\exists y\,Txy) \rightarrow Tmx)}$
2. "Alla som inte är logiker och som tycker om minst två logiker, tycker också om någon som inte är logiker."
dvs "För alla x, om x inte är logiker och x tycker om två logiker, så finns y så att y inte är logiker och x tycker om y."
dvs "För alla x, om ${\sim}Lx$ och det finns olika y, z med Ly, Lz och Txy, Txz, så finns y med ${\sim}Ly$ och Txy.", så **svar**:
$\boldsymbol{\forall x\,(({\sim}Lx\,\&\,\exists y\,\exists z\,(y \neq z\,\&\,(Ly\,\&\,Lz)\,\&\,(Txy\,\&\,Txz))) \rightarrow \exists y\,({\sim}Ly\,\&\,Txy))}$
I båda fallen är förstås logiskt ekvivalenta varianter möjliga.

6) För att visa att $\exists x\,\forall y\,Pxy,\ \forall x\,\exists y\,(x \neq y \leftrightarrow (Pxy \leftrightarrow Pyx))\ \nvDash\ \forall x\,\exists y\,(Pxy\,\&\,Pyx)$ skall vi finna en tolkning som gör premisserna sanna och den tänkta slutsatsen falsk.
Första premissen p_1, $\exists x\,\forall y\,Pxy$, säger: Det finns en punkt med pilar till alla punkter.
Andra premissen p_2, $\forall x\,\exists y\,(x \neq y \leftrightarrow (Pxy \leftrightarrow Pyx))$, säger: Varje punkt har pilar åt inget eller båda håll med någon annan punkt (*annan* punkt, ty $x \neq x \leftrightarrow (Pxx \leftrightarrow Pxx)$ är falsk).
Slutsatsen s, $\forall x\,\exists y\,(Pxy\,\&\,Pyx)$, säger: Varje punkt har dubbelriktad pil till någon punkt.
Låt det enligt p_1 gå pilar till alla punkter från α. Enligt p_2 är pilen till någon punkt, kalla den β, dubbelriktad. Villkoret i p_2, liksom i s, är då uppfyllt också för β. Men en punkt till, γ, gör att s kan bli falsk (och p_1, p_2 sanna). Låt nämligen Pac vara sann, men Pbc, Pcb, Pcc falska!
Vi finner alltså tolkningen (med minimal domän), se figuren:
$D = \{\alpha, \beta\,\gamma\}$, $\quad \mathrm{Ext}(P) = \{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle, \langle\alpha,\gamma\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle\}$.
Den gör ju



- $\boldsymbol{\exists x\,\forall y\,Pxy}$ **sann**, ty Paa, Pab, Pac alla sanna
- $\boldsymbol{\forall x\,\exists y\,(x \neq y \leftrightarrow (Pxy \leftrightarrow Pyx))}$ **sann**,
  ty $a \neq b \leftrightarrow (Pab \leftrightarrow Pba), b \neq a \leftrightarrow (Pba \leftrightarrow Pab)$,
  $c \neq b \leftrightarrow (Pcb \leftrightarrow Pbc)$ alla sanna
- $\boldsymbol{\forall x\,\exists y\,(Pxy\,\&\,Pyx)}$ **falsk**,
  ty $\exists y\,(Pcy\,\&\,Pyc)$ falsk,
  ty Pca, Pcb, Pcc alla falska

så **saken är klar.**

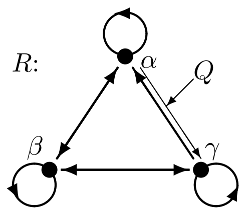
7) Att visa: $\forall x \forall y\,(Rxy \rightarrow Rxx),\ \exists x \forall y\,(x \neq y \leftrightarrow Rxy)\ \vdash\ \exists x \forall y\ x = y$.
Idé: Låt a uppfylla $\forall y\,(a \neq y \leftrightarrow Ray)$, dvs Rab precis om $a \neq b$. Enligt första premissen gäller Raa om Rab, så det finns inte b med $a \neq b$.

1	(1)	$\forall x \forall y\,(Rxy \rightarrow Rxx)$	premiss		
2	(2)	$\exists x \forall y\,(x \neq y \leftrightarrow Rxy)$	premiss		
3	(3)	$\forall y\,(a \neq y \leftrightarrow Ray)$	antagande		
4	(4)	$a \neq b$	antagande		
3	(5)	$a \neq b \leftrightarrow Rab$	3	$\forall$E	
3,4	(6)	Rab	5,4	$\leftrightarrow$E	
1	(7)	$\forall y\,(Ray \rightarrow Raa)$	1	$\forall$E	
1	(8)	$Rab \rightarrow Raa$	7	$\forall$E	
1,3,4	(9)	Raa	8,6	$\rightarrow$E	
3	(10)	$a \neq a \leftrightarrow Raa$	3	$\forall$E	
1,3,4	(11)	$a \neq a$	10,9	$\leftrightarrow$E	
	(12)	$a = a$		=I	
1,3,4	(13)	$\curlywedge$	11,12	$\sim$E	
1,3	(14)	$\sim a \neq b$	4,13	$\sim$I	
1,3	(15)	$a = b$	14	DN	
1,3	(16)	$\forall y\, a = y$	15	$\forall$I	[b inte i (1),(3)]
1,3	(17)	$\exists x \forall y\ x = y$	16	$\exists$I	
1,2	(18)	$\exists x \forall y\ x = y$	2,3,17	$\exists$E	[a inte i (2),(17),(1)]

Slutsatsen på rad (18) beror bara av premisserna på rad (1) och (2), **saken är klar**.

8) Den givna sentensen $\forall x \forall y\,((Qxy \rightarrow Qyx) \leftrightarrow Rxy)$ är tydligen sann om och endast om Rst är sann precis då $Qst \rightarrow Qts$ är sann, dvs då inte både Qst är sann och Qts är falsk.
Relationen $\mathcal{R}$ som gör den givna sentensen sann är

- **reflexiv**, dvs $\forall x\, Rxx$ är sann, ty för godtyckligt a gäller $(Qaa \rightarrow Qaa) \leftrightarrow Raa$, så Raa
- **inte (säkert) symmetrisk**, dvs $\forall x \forall y\,(Rxy \rightarrow Ryx)$ behöver inte vara sann.
- **inte (säkert) transitiv**, dvs $\forall x \forall y \forall z\,((Rxy\ \&\ Ryz) \rightarrow Rxz)$ behöver inte heller vara sann



En tolkning som varken gör $\mathcal{R}$ symmetrisk eller transitiv ges av (se figuren):
$D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\quad \mathrm{Ext}(Q) = \{\langle \alpha, \gamma \rangle\}$,
$\mathrm{Ext}(R) = \{\langle \alpha, \alpha \rangle, \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \alpha \rangle, \langle \beta, \beta \rangle, \langle \beta, \gamma \rangle, \langle \gamma, \alpha \rangle, \langle \gamma, \beta \rangle, \langle \gamma, \gamma \rangle\}$.
Den gör den givna sentensen sann, men varken $Rca \rightarrow Rac$ eller $(Rab\ \&\ Rbc) \rightarrow Rac$, ty Rca, Rab, Rbc är sanna i tolkningen, men inte Rac.
Svar: $\mathcal{R}$ är reflexiv, men varken säkert symmetrisk eller transitiv.

9a) Frågan är om $(p \vDash q$ och $q \nvDash r) \ \Rightarrow\ p \nvDash r$, dvs om varje tolkning som gör p sann gör q sann och det finns (minst) en tolkning som gör q sann och r falsk, följer då att det finns en tolkning som gör p sann och r falsk?
Nej, alla tolkningar som gör q sann och r falsk kan göra p falsk. Låt t.ex. p och r båda vara $A\ \&\ B$ och q vara A. Då gäller $p \vDash q$ (ty $A\ \&\ B \vDash A$) och $q \nvDash r$ (ty $A \nvDash A\ \&\ B$), men inte $p \nvDash r$ (ty $A\ \&\ B \vDash A\ \&\ B$).
b) Nu gäller det om $(p \vDash q$ och $p \nvDash r) \ \Rightarrow\ q \nvDash r$.
$p \nvDash r$ ger att det finns en tolkning som gör p sann och r falsk och $p \vDash q$ ger att i den tolkningen är också q sann, så $q \nvDash r$.
Så **svar: a) Nej, b) Ja.**

10) Låt ϕz vara formeln $a + z = b + z \to a = b$. Vi skall först visa $\forall z\, \phi z$.
$\phi 0$ gäller, eftersom $a + 0 \overset{\text{P3}}{=} a,\ b + 0 \overset{\text{P3}}{=} b$, så $a + 0 = b + 0 \to a = b$.
Antag att ϕc gäller, dvs $a + c = b + c \to a = b$.
Då fås $a + S(c) = b + S(c)$ ger (P4) $S(a+c) = S(b+c)$, så (P1) $a+c = b+c$, så (ϕc) $a = b$.
Alltså $(\to\text{I})$ $a + S(c) = b + S(c) \to a = b$, dvs $\phi S(c)$.
Därmed gäller $\phi c \to \phi S(c)$ för alla c, så $\forall z\, (\phi z \to \phi S(z))$.
Så $\phi 0\ \&\ \forall z\, (\phi z \to \phi S(z))$ gäller och enligt axiom (en alfabetisk variant av) P7 (med $n = 0$) gäller då $\forall z\, \phi z$, dvs $\forall z\, (a + z = b + z \to a = b)$. Eftersom detta gäller för godtyckliga a, b fås ($\forall$I två gånger) det önskade $\boldsymbol{\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x + z = y + z \to x = y)}$, så **saken är klar.**

11) Vi skall visa att $\sim A,\ \Box\, (B \to \Box\, A) \vdash_{S5} \sim \Diamond\, B$.
Idé: Antag $\Diamond\, B$. Då är B sann i någon värld (dvs antas för $\Diamond$E) och enligt premiss 2 gäller där $B \to \Box\, A$, så $\Box\, A$. Därur A, speciellt i den verkliga världen, där $\sim A$ (premiss 1), så $\curlywedge$ och slutsatsen.

1	(1)	$\sim A$	premiss		
2	(2)	$\Box\, (B \to \Box\, A)$	premiss		
3	(3)	$\Diamond\, B$	antagande		
4	(4)	B	antagande		
2	(5)	$B \to \Box\, A$	2	$\Box$E	
2,4	(6)	$\Box\, A$	5,4	$\to$E	
2,3	(7)	$\Box\, A$	3,4,6	$\Diamond$E	[(6),(2) fullt modaliserade]
2,3	(8)	A	7	$\Box$E	
1,2,3	(9)	$\curlywedge$	1,8	$\sim$E	
1,2	(10)	$\sim \Diamond\, B$	3,9	$\sim$I	

Slutsatsen på sista raden beror bara av premisserna på rad (1) och (2), så **saken är klar**.

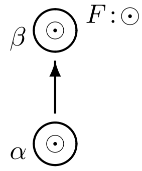
12) Vi skall visa att $\Box\, \exists x\, \exists y\, (x \neq y\ \&\ \Box\, Qxy) \nvDash_{S5} \Box\, \exists x\, \Box\, \exists y\, \Diamond\, Qxy$.
Vi söker alltså en tolkning som gör premissen sann och den tänkta slutsatsen falsk.
Premissen säger att det i en godtycklig värld finns två olika element σ, τ, så att Qst är sann i alla världar. Att slutsatsen är falsk betyder att det finns en värld så att för alla element κ där, finns en värld så att för alla element λ där, gäller att Qkl är falsk i alla världar.
Man finner en tolkning som visar påståendet:
$\mathcal{W} = \{w^*, u\},\ D = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\},\ w^*(D) = \{\alpha, \beta\},\ u(D) = \{\gamma, \delta\},\ w^*[Q] = u[Q] = \{\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \gamma, \delta \rangle\}$.
Den gör ju

- $\Box\, \exists x\, \exists y\, (x \neq y\ \&\ \Box\, Qxy)$ **sann**,
  ty $w^*[\exists x\, \exists y\, (x \neq y\ \&\ \Box\, Qxy)] = u[\exists x\, \exists y\, (x \neq y\ \&\ \Box\, Qxy)] = 1$,
  ty $w^*[\Box\, Qab] = 1 = u[\Box\, Qcd]$, ty $w^*[Qab] = u[Qab] = 1$ och $w^*[Qcd] = u[Qcd] = 1$
- $\Box\, \exists x\, \Box\, \exists y\, \Diamond\, Qxy$ **falsk**, ty $w^*[\exists x\, \Box\, \exists y\, \Diamond\, Qxy] = u[\exists x\, \Box\, \exists y\, \Diamond\, Qxy] = 0$,
  ty $w^*[\Box\, \exists y\, \Diamond\, Q\, {}^{a}_{b}\, y] = u[\Box\, \exists y\, \Diamond\, Q\, {}^{c}_{d}\, y] = 0$,
  ty $u[\exists y\, \Diamond\, Q\, {}^{a}_{b}\, y] = w^*[\exists y\, \Diamond\, Q\, {}^{c}_{d}\, y] = 0$,
  ty $w^*[Q\, {}^{a}_{b}\, {}^{c}_{d}] = u[Q\, {}^{a}_{b}\, {}^{c}_{d}] = 0$ och $w^*[Q\, {}^{c}_{d}\, {}^{a}_{b}] = u[Q\, {}^{c}_{d}\, {}^{a}_{b}] = 0$

Saken är klar. (" ${}^{a}_{b}$" betyder här "vilkensom av a och b", motsvarande för " ${}^{c}_{d}$".)

13) Vi skall visa att $(A \vee \sim A) \to \sim B \vDash_I \sim B$.
Låt som vanligt S vara mängden av informationstillstånd, med rot α och ordning $\leqslant$, i en intuitionistisk tolkning.
Antag att $\alpha \Vdash (A \vee \sim A) \to \sim B$. Vi skall visa att $\alpha \Vdash \sim B$, dvs att $\sigma \nVdash B$ för alla $\sigma \in S$.
Om $\sigma \Vdash B$, kan inte $\sigma \Vdash \sim A$, ty då skulle $\sigma \Vdash A \vee \sim A$ och därmed $\sigma \Vdash \sim B$ (eftersom $\alpha \Vdash (A \vee \sim A) \to \sim B$), omöjligt. Så det finns $\tau \in S$ med $\sigma \leqslant \tau$ och $\tau \Vdash A$, så $\tau \Vdash A \vee \sim A$, så $\tau \Vdash \sim B$, omöjligt, ty $\sigma \Vdash B,\ \sigma \leqslant \tau$.
Alltså $\sigma \nVdash B$, σ godtyckligt, så $\alpha \Vdash \sim B$.
Saken är klar, vi har visat $\boldsymbol{(A \vee \sim A) \to \sim B \vDash_I \sim B}$.

14) Vi skall visa att $\sim\forall x\, Fx \to A \;\nvDash_I\; \forall x\,(\sim A \to Fx)$ genom att finna en tolkning så att $\alpha \Vdash \sim\forall x\, Fx \to A$ och $\alpha \nVdash \forall x\,(\sim A \to Fx)$.
Då motsvarande (riktiga) slutledning visas klassiskt, används dels $\sim\forall x\, Fx \to A \vDash \sim A \to \forall x\, Fx$, dels $\sim A \to \forall x\, Fx \vDash \forall x\,(\sim A \to Fx)$. Den senare gäller intuitionistiskt, men inte den förra. Ett motexempel fås då som för $\sim B \to A \;\nvDash_I \sim A \to B$:
Betrakta tolkningen (se fig.) $S = \{\alpha, \beta\}$, $\leqslant = \{\langle \alpha, \beta \rangle\}$,
$dom(\alpha) = dom(\beta) = \{\odot\}$, $warr(\alpha) = \varnothing$, $warr(\beta) = \{\langle \text{‘}F\text{’}, \odot \rangle\}$.
Den ger:



- $\alpha \Vdash \sim\forall x\, Fx \to A$, ty $\alpha, \beta \nVdash \sim\forall x\, Fx$,
  ty $\beta \Vdash \forall x\, Fx$, ty $\beta \Vdash F\odot$ (och $dom(\beta) = \{\odot\}$, β maximalt)
- $\alpha \nVdash \forall x\,(\sim A \to Fx)$, ty $\alpha \nVdash \sim A \to F\odot$,
  ty $\alpha \Vdash \sim A$ (ty $\alpha, \beta \nVdash A$) och $\alpha \nVdash F\odot$

Så **saken är klar**, vi har visat $\boldsymbol{\sim\forall x\, Fx \to A \;\nvDash_I\; \forall x\,(\sim A \to Fx)}$.

15) $\Gamma \vDash \Delta$ betyder att varje modell för Γ gör minst en sentens i Δ sann. Med beteckningen $\sim\Delta = \{\sim q \mid q \in \Delta\}$ är det detsamma som att $\Sigma = \Gamma \cup \sim\Delta$ saknar modeller.
Enligt kompakthetssatsen finns en ändlig $\Sigma' \subseteq \Sigma$ som också saknar modeller. Med $\Gamma' = \Sigma' \cap \Gamma$ och $\sim\Delta' = \Sigma' \cap \sim\Delta$ fås ändliga $\Gamma' \subseteq \Gamma$ och $\Delta' \subseteq \Delta$ så att $\Sigma' = \Gamma' \cup \sim\Delta'$.
Låt p vara $p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, \ldots \,\&\, p_n$, där $\Gamma' = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.
Då gäller $\boldsymbol{\Gamma \vDash p}$, ty alla $p_i \in \Gamma$.
Eftersom $\Gamma' \cup \sim\Delta'$ saknar modeller gör varje modell för Γ', dvs för p, minst en sentens i $\sim\Delta'$ falsk, dvs minst en sentens i Δ' (och därmed i Δ) sann, så $\boldsymbol{p \vDash \Delta}$.
Saken är klar.

16) Vilka tolkningar gör sentensen $\forall u\, \forall X\, \exists Y\, (\forall x\, u(x) \neq x \to \forall x\, \forall y\, (Xxy \leftrightarrow Yxu(y)))$ sann?
Den är sann i en tolkning (dvs för en viss domän D) precis om det för varje val av $\mathrm{Ref}(f)$ och $\mathrm{Ext}(R)$ finns ett val av $\mathrm{Ext}(S)$ så att $\forall x\, f(x) \neq x \to \forall x\, \forall y\, (Rxy \leftrightarrow Sxf(y))$ är en sann sentens i första ordningens logik.
För givna $\mathrm{Ref}(f)$ (med $\forall x\, f(x) \neq x$ sann) och $\mathrm{Ext}(R)$ bestäms $\mathrm{Ext}(S)$ av att $Rxy \leftrightarrow Sxf(y)$ är sann för alla x, y, **förutsatt** att det kravet inte ger samma uttryck olika sanningsvärden.
Om $|D| = 1$, dvs domänen bara innehåller ett element, är $\forall x\, f(x) \neq x$ aldrig sann och sentensen **sann**.
Om $|D| = 2$, säg $D = \{\alpha, \beta\}$, är den enda $\mathrm{Ref}(f)$ som gör $\forall x\, f(x) \neq x$ sann den som gör $f(a) = b$ och $f(b) = a$ sanna. Det betyder att vi entydigt kan välja $\mathrm{Ext}(S)$ för att göra sentensen sann, nämligen så att $Raa \leftrightarrow Sab, Rab \leftrightarrow Saa, Rba \leftrightarrow Sbb, Rbb \leftrightarrow Sba$ alla är sanna.
I det fallet är sentensen alltså **sann**.
Om $|D| > 2$, låt α, β, γ vara olika element i D och välj $\mathrm{Ref}(f)$ så att $f(a) = b$ och $\forall x\,(x \neq a \leftrightarrow f(x) = a)$ är sanna. Då är $\forall x\, f(x) \neq x$ sann, men om vi låter $\mathrm{Ext}(R) = \{\langle \alpha, \beta \rangle\}$ blir Rab sann, Rac falsk, så endera av $Rab \leftrightarrow Saf(b)$ och $Rac \leftrightarrow Saf(c)$ falsk (ty $Saf(b)$ och $Saf(c)$ är båda Saa). Således är den givna sentensen i det fallet **falsk**.
Så **svar: Sentensen är sann precis om domänen D har högst två element.**
(Om man tillåter att $D = \varnothing$, blir sentensen sann även i det fallet, eftersom varje $\forall x\, \phi x$ då är sann.)