070607

1. Visa att linjerna $\bar{r} = (1,2,-1) + t(1,1,0)$ och $\bar{r} = (-1,2,3) + t(-1,0,2)$ skär varandra i punkten $(1,2,-1)$. Bestäm dessutom ekvationen för det plan som de båda linjerna ligger i. (3p)

5. Bestäm inversen till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Lös dessutom med hjälp av inversmatrisen det linjära ekvationssystemet $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. (3p)

6. I ett ortogonalt koordinatsystem införs de nya basvektorerna $\bar{f_1} = \frac{1}{5}(4,3)$ och $\bar{f_2} = \frac{1}{5}(-3,4)$. Bestäm ekvationen i det nya koordinatsystemet för den kurva som i gamla systemet har ekvationen $y = x^2$.
Använd variablerna u och v i det nya systemet. (4p)

10.
a. Visa att om den kvadratiska matrisen A är symmetrisk, så är också A^2 symmetrisk. (2p)
b. Visa att om den kvadratiska matrisen A har egenvärdet λ så har A^2 egenvärdet λ^2. (2p)
Ovanstående skall visas för en allmän $n \times n$-matris A.
Matrisrelationen $(AB)^T = B^T A^T$ får användas utan bevis.

070313

1. Skriv ned ekvationen för det plan Π som går genom punkterna $(1,1,1)$, $(1,2,4)$ och $(2,3,5)$. Räkna ut kortaste avståndet från punkten $(2,2,3)$ till planet Π. (3p)

3. Lös matrisekvationen $AX = BA$, där
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ (3p)

(070313, forts.)

5. Nedanstående matris är diagonaliserbar.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestäm den diagonala matrisen D till A. Visa sedan genom att studera D att A beskriver en projektion på ett plan . (3p)

7a. Lös ekvationssystemet

$x + 2y = -2$

$x - 3y = 3$ (1p)

$2x - y = 1.$

7b. Lös i minstakvadratmetodens mening ekvationssystemet

$x + 2y = -2$

$x - 3y = 2$ (3p)

$2x - y = 1.$

9. Låt vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ vara sådana att $|\bar{u} + \bar{v}| = \sqrt{9 + \sqrt{8}}$ och $|\bar{u} - \bar{v}| = \sqrt{9 - \sqrt{8}}$. Vidare är $|\bar{v}| = 1$. Räkna ut vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

Ledning. Räkna ut $|\bar{u}+\bar{v}|^2 = (\bar{u}+\bar{v}) \cdot (\bar{u}+\bar{v})$ samt $|\bar{u}-\bar{v}|^2 = (\bar{u}-\bar{v}) \cdot (\bar{u}-\bar{v})$ och utnyttja de samband du får för att räkna ut $\bar{u} \cdot \bar{v}$ samt $|\bar{u}|$. (4p)

10. Låt $\{\bar{e}_1, e_2\}$ vara en bas för $\mathbb{R}^2$. Vidare är $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$ och $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2\}$ med

$$\begin{cases} \bar{f}_1 = & \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 \\ \bar{f}_2 = & \bar{e}_1 - \bar{e}_2 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} \bar{g}_1 = & \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 \\ \bar{g}_2 = & 2\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 \end{cases} \qquad (1)$$

två andra baser för $\mathbb{R}^2$. Låt $\bar{u}$ vara en vektor med följande koordinater i f-basen: $\bar{u} = 3\bar{f}_1 + 10\bar{f}_2 = (3, 10)_f$. Vad blir $\bar{u}$:s koordinater i g-basen? Ange även ett samband mellan $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$ och $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2\}$, på matrisform eller formen som i (1). (4p)

060608

1. Lös ut matrisen X ur matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3p)

3. Bestäm ekvationen för det plan som är vinkelrätt mot planet $2x - 3y + z = 0$ och som innehåller linjen $(x, y, z) = (2 + t, 3 - t, 2t)$. (3p)

060608 - forts.

5. Lös i minstakvadsratmetodens mening det överbestämda ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(3p)

8. Visa att vektorerna $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ är linjärt beroende samt skriv en av dem som en linjärkombination av de övriga. (4p)

10 a. Bestäm egenvärden och motsvarande egenvektorer.till matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ och till matrisen $B = P^{-1}AP$, där $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. (2p)

10 b. Visa allmänt att om två kvadratiska matriser S och T uppfyller $S = P^{-1}TP$, för någon inverterbar matris P, så har de samma egenvärden. (2p)

060227

1. Bestäm konstanten k så att följande ekvationssystem får icketriviala lösningar, samt bestäm dessa. (3 p)

$$\begin{cases} x + 3y + z &= 5 \\ -x + 7y + 9z &= 7 \\ 2x + y - 3z &= k \end{cases}$$

3. Vilken punkt i planet $6x - 3y + 2z - 5 = 0$ ligger närmast punkten $(8, 2, 6)$? (3 p)

6. A är matrisen (4 p)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en ortogonal (ON-) matris C och en diagonal matris D så att $D = C^T AC$.

060227 - forts.

9. Lös ekvationen (4 p)

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x \end{vmatrix} = 0.$$

där determinanten är av ordning n $(n \geq 2)$.
(Om du kan lösa ekvationen för $n = 3, 4$ får du delpoäng.)

10 Finn en matris B sådan att $B^2 = A$, där (4 p)

$$A = \begin{pmatrix} -21 & 75 \\ -10 & 34 \end{pmatrix}$$

Ledning: Finn en matris C sådan att $D = C^{-1}AC$ är diagonal. Finn sedan G så att $G^2 = D$.
Observera att $(CGC^{-1})^2 = CG^2C^{-1}$.

050822

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ x - 2y + z &= 0. \\ 3x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

(3p)

4. Bestäm avståndet mellan origo och tangentplanet till ytan
$4x^2 + y^3 + yz = 6$ i punkten $(1, 1, 1)$. (3p)

6. Betrakta punkterna $A : (1, 0, 0)$, $B : (0, 1, 0)$, $C : (0, 0, 1)$, $D : (1, 3, 3)$,
$E : (2, 2, 2)$ och $F : (1, 0, 7)$.
Avgör vilken av tetraedrarna $ABCD, ABCE$ och $ABCF$ som har störst volym. (4p)

7. Bestäm tre ortonormerade egenvektorer till matrisen

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

(4p)

050822 forts.

10. Låt K, L och M vara tre $n \times n$-matriser som uppfyller ekvationerna

$$\begin{aligned} KL - LK &= M \\ LM - ML &= K\,. \\ MK - KM &= L \end{aligned}$$

Definiera $C = K^2 + L^2 + M^2$.

a. Visa att $CK - KC = (L^2 + M^2)K - K(L^2 + M^2)$. (1p)

b. Visa att $CK = KC$. (3p)

Anm: Det gäller också (vilket inte behöver visas) att $CL = LC$ och $CM = MC$.

050330

8. Bestäm för varje reellt tal a antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x + y + az &= 0 \\ 2x + 3y + az &= 4 \\ ax + y + 2z &= -2a \end{aligned}$$

Bestäm också samtliga lösningar, då det finns oändligt många lösningar. (4p)

9. Lös matrisekvationen $A^T X = A$, då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(4p)

10. Vi antar att matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$ saknar invers och har egenvektorn $(1, 1, 1)$.

Bestäm under dessa antaganden samtliga möjliga värden på de reella talen a, b och c. (4p)