SF1645, 080211

1

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \; -2 \;\; -3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right) \; -3/2 \; \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y = \frac{1}{2}(-17 + 7 \cdot 3) = 2 \\ x = 9 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 1 \end{cases}$$

Ekv. systemet har den enda lösningen $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

2a) Alternativ i) 4 vektorer i $\mathbb{R}^3$ kan ej vara linjärt oberoende

Alternativ ii)

Linjärt oberoende iffall

$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = 0$ endast då $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \bar{0}$

Söker alltså lösn. till

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 19 & 0 \end{array}\right]$$

Fler obekanta än ekv.

Alltså oändligt många lösningar.

Finns alltså massor av sätt att skriva

$0 = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4$

där $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \neq \bar{0}$.

b) Söker x_1, x_2, x_3, x_4 s.a.

$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4$

Alltså

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 19 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \quad -2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 13 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 15 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} +1 \quad +2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 33 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 17 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 15 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 50 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 17 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 15 & 1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \begin{cases} x_4 = t \\ x_3 = -1 - 15t \\ x_2 = -2 + 17t \\ x_1 = 4 - 50t \end{cases}$$

Parametrisering av möjliga koordinater.

Alltså $w = (4 - 50t) v_1 + (-2 + 17t) v_2 + (-1 - 15t) v_3 + t v_4$, för varje t.

Det finns alltså oändligt många sätt att skriva w som linj. komb. av v_1, v_2, v_3, v_4

3] Söker normal $\bar{n}$ till planet,

$v_1 = (1,2,4) - (1,1,1) = (0,1,3)$

$v_2 = (2,3,5) - (1,1,1) = (1,2,4)$

$$\bar{n} = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (4-6, 3, -1) = (-2, 3, -1)$$

Alltså,

Planets ekv: $-2x + 3y - z + D = 0$

D erhålles genom insättning av t.ex $(1,1,1)$ i ekvationen. $\Rightarrow -2\cdot 1 + 3 \cdot 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 0.$

Således,

Planets ekv. är : $\underline{-2x + 3y - z = 0}$: Π

Punkten P:s avstånd till planet Π kan beräknas på flera sätt. T.ex som följer. Kortaste vägen från P till planet Π är linjen som går ortogonalt från P till Π.

Låt alltså $L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \bar{n}t = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} t$

Då $\bar{n}$ per definition är ortogonal till planet.

Lös ut L:s skärning med Π genom insättning av L:s uttryck i planet Π:s ekv.

$$-2\cdot(2-2t) + 3\cdot(2+3t) - (3-t) = -1 + 14t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{14}$$

Skärningspunkten, $\bar{Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Men vi söker avståndet mellan denna och P.

$$d(Q,P) = \left| \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{14}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{14} |(-2, 3, -1)| = \frac{1}{14}\sqrt{4+9+1} = \frac{\sqrt{14}}{14} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

Således, kortaste avstånd mellan P och Π är $\frac{1}{\sqrt{14}}$.

(4) Finn minstakvadrat lösningen till $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 6 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases}$

Vi får minstakvadratlösningen genom att lösa

$A^t A\bar{x} = A^t \bar{b}$ där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^t \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 29 \end{pmatrix}$$

Genom att nu lösa

$$\left(\begin{array}{cc|c} 29 & 9 & 51 \\ 9 & 9 & 29 \end{array}\right)$$

får vi att $\begin{cases} x_1 = \frac{11}{10} \\ x_2 = \frac{191}{90} \end{cases}$ i $A^t A\bar{x} = A^t \bar{b}$

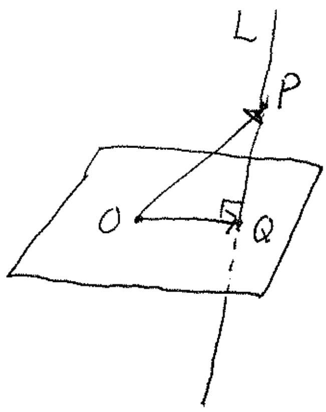
__Svar:__ $x_1 = \frac{11}{10}$ och $x_2 = \frac{191}{90}$

⑤ Definiera en avbildning från $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ genom ortogonal projektion på planet $x+y+z=0$.
Finn matrisen som svarar mot denna avbildning

Vi vill hitta matris A så att $A\bar{v}=\bar{u}$, där $\bar{u}$ är $\bar{v}$:s ortogonala projektion i planet $x+y+z=0$.

Låt $\bar{v}=\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}$ och $\bar{u}=\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}$

Normalvektorn till planet är $\bar{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$



Linjen L som går mellan P och Q har ekvationen $L: \overrightarrow{OP}+t\bar{n}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = p_1+t \\ y = p_2+t \\ z = p_3+t \end{cases}$$

Insättning i planets ekvation ger oss Q:s t-värde i L

$(p_1+t)+(p_2+t)+(p_3+t)=0$ gör att

$t=-\frac{1}{3}(p_1+p_2+p_3)$

Så $\bar{u}=\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1-\frac{1}{3}(p_1+p_2+p_3)\\p_2-\frac{1}{3}(p_1+p_2+p_3)\\p_3-\frac{1}{3}(p_1+p_2+p_3)\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2p_1-p_2-p_3\\-p_1+2p_2-p_3\\-p_1-p_2+2p_3\end{pmatrix}$

<u>Alltså</u> $A\bar{v}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}=\bar{u}$

<u>Svar</u>: $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$

6a A diagonaliserbar med ON-matris

$\Longleftrightarrow$

$A^t = A \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0.$

$\therefore \quad a = 0.$

6b $\det(A - \lambda \bar{I}) = -(1+\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda - 9)$

Så $\det(A - \lambda \bar{I}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \text{ (dubbel!)} \\ \lambda_3 = 9. \end{cases}$

$\lambda = 9$: $(A - 9\bar{I})\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} = t \cdot (1\ 2\ 0)^t$

$\lambda = -1$: $(A + \bar{I})\bar{x} = \bar{0}$ ger systemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & a & 0 \\ 4 & 8 & a(a+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Fall 1: $a^2 - a \neq 0 \Rightarrow$ kan ej hitta två oberoende lösningar, dvs ej diagonaliserbar

Fall 2: $a^2 - a = 0$ dvs $a = 0$ eller $a = 1$.

Om $a = 0$ ger del 1 att diagonalisering möjlig.

$a = 1 \Rightarrow$ lösningar på formen $\bar{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ A har 3 oberoende egenvektorer

$\Rightarrow$ A diagonaliserbar

7. Låt $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ -0.2 & 1.2 \end{pmatrix}$.

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1.6\lambda + 0.6$;

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = 0.8 \pm 0.2$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0.6$ är egenvärden.

v_1: $(A - I)v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

v_2: $(A - 0.6I)v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ är egenvektorer med egenvärden $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0.6$.

$\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4v_1 - v_2$ och

$\bar{x}(n) = A^n \bar{x}(0) = 4 \cdot 1^n \cdot v_1 - 0.6^n \cdot v_2$

$= 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0.6 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3 \cdot (0.6)^n \\ 4 - 0.6^n \end{pmatrix}$.

$\therefore \bar{x}(n) = \begin{pmatrix} 4 - 3 \cdot (0.6)^n \\ 4 - 0.6^n \end{pmatrix}$

8

Let $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$AX + XA = B \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2a+b+c & a+3b+d \\ a+3c+d & b+c+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2a + b + c + 0 = 10 \\ a + 3b + 0 + d = 12 \\ a + 0 + 3c + d = 18 \\ 0 + b + c + 4d = 16 \end{cases}$$

$\iff$ [Mha Gauss elimination]

$\iff a = 1,\ b = 3,\ c = 5,\ d = 2$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$