Institutionen för matematik
KTH

TENTAMEN SF1645
LINJÄR ALGEBRA FÖR I1
Måndagen den 11 februari, 2008, kl. 08.00-13.00

Hjälpmedel: Inga.
Instruktioner: Tentamen består av 8 uppgifter, som ger totalt högst 24 poäng. För betyg Fx krävs 40%, för E krävs 45%, för D krävs 55%, för C krävs 65%, för B krävs 75% och för A krävs 85%. (Inlämningsuppgifterna är värda 25%, och tentamen 75%.)
Lösningarna skall motiveras väl.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{cases}$$

(3p)

2. (a) Låt

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Är v_1, v_2, v_3, v_4 linjärt oberoende? (1p)

(b) Uttryck, eller visa att det inte går att uttrycka,

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

som en linjärkombination av v_1, v_2, v_3, v_4. (2p)

3. Skriv ned ekvationen för det plan Π som går genom punkterna $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 4)$ och $(2, 3, 5)$. Räkna sedan ut kortaste avståndet mellan punkten $P = (2, 2, 3)$ till planet Π.

V.G.V.

4. Finn minstakvadratlösningen till det överbestämda ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 &= 6 \\ 3x_1 - x_2 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 9. \end{cases}$$

(3p)

5. Definiera en avbildning från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ genom ortogonal projektion på planet $x+y+z=0$. Finn matrisen som svarar mot denna avbildning. (3p)

6. Låt $x_1(n)$ och $x_2(n)$ beteckna antalet ugglor (i hundratal) och antalet möss (i tiotusental) som finns i en skog vid år n, och låt $\overline{x}(n) = (x_1(n), x_2(n))^t$. Enligt Fältbiologerna är sambandet mellan $\overline{x}(n+1)$ och $\overline{x}(n)$ givet av

$$\overline{x}(n+1) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ -0.2 & 1.2 \end{pmatrix} \overline{x}(n).$$

Givet att $\overline{x}(0) = (1,3)^t$, beskriv antalet ugglor och möss vid år n. (3p)

7. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & a \\ 4 & 7 & a(a+1) \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- För vilka värden på a är A diagonaliserbar med hjälp av en ON-matris? (1p).
- För vilka värden på a är A diagonaliserbar? (2p).

8. Bestäm X så att $AX + XA = B$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

och

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}.$$

(3p)