SF1645 - sammanfatting

- Projektioner och koordinater
  - Givet vektor v och linje L, skriv $v = v_L + v_N$ (komposantuppdelning) där v_L är parallell med L och v_N är vinkelrät mot L.
  - v_L kallas den *ortogonala projektionen av v på L.*
- Skalärprodukt
  - Om u är vektor, e en enhetsvektor som är parallell med linjen L, så är $u_L = (u \cdot e)e$, och $|u_L| = u \cdot e$.
  - Längd av vektor: $|v|^2 = v \cdot v$.
  - $u \cdot v = |u||v|\cos(\alpha)$ där α är vinkeln mellan u, v.
  - $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u$ och v vinkelräta *eller* någon av u, v lika med nollvektorn.
  - Säger att u, v *ortogonala* om $u \cdot v = 0$.
  - Vektorna $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sägs vara *ortonormala* om $v_i \cdot v_j = 0$ om $i \neq j$, och $v_i \cdot v_i = 1$. OBS: ortonormala vektorer är automatiskt linjärt oberoende.
  - ON-bas: bas av ortonormala vektorer.
- Vektor/kryss-produkt
  - $|u \times v| = |u||v|\sin(\alpha)$ där α är vinkeln mellan u och v.
  - $u \times v$ vinkelrät mot både u och v.
  - Orientering: $(u, v, u \times v)$ *högerorienterad.*
- Geometri
  - Ekvation för plan/linjer (med och utan parameterform.)
  - Skärning mellan {linje,plan} och {linje,plan}: lös ekvationssystem!
  - Avstånd mellan {punkt,linje,plan} till {linje,plan}: projicera! (Alternativ: ställ upp ekvationsystem för ortogonalitet etc och lös.)
- Matriser
  - Speciella matriser: enhetsmatriser, diagonala, över-triangulära, under-triangulära.
  - Transponat: med $A = (a_{ij})$ är $A^t = (a_{ji})$. A är *symmetrisk* om $A^t = A$. Notera att $(AB)^t = B^t A^t$.
  - En linjär avbildning $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ kan beskrivas med en $n \times m$ matris. ("Ta reda på var enhetsvektorerna tar vägen".)
  - Viktiga geometriska avbildningar: vridning, spegling, projektion.
- Ekvationssystem
  - Skrivs kort som: $Ax = b$.
  - Om $b = 0$ finns alltid den *triviala lösningen $x = 0$.*
  - Hur lösa? Gausselimination! (Gör radoperationer tills systemet blir på trappform, bakåtsubstituera sedan.)
  - Minstakvadratmetoden: Om $Ax = b$ saknar lösning, hitta "bästa möjliga lösning", dvs minimera felet $|Ax - b|$. Hur? Lös

$$A^t A x = A^t b.$$

- Determinanter
  - Geometrisk tolkning: $|\det(A)|$ ger area/volym (i $\mathbb{R}^2$ respektive $\mathbb{R}^3$.)
  - Viktig egenskap: determinanten som funktion i godtycklig rad/kolonn är linjär.

- $\det(A)$ oförändrad vid vissa rad/kolonnoperationer (t.ex. lägg till multipel av en rad till en annan rad.) *Byter tecken* om vi byter plats på två rader/kolonner.
- Regler: $\det(A^t) = \det(A)$, $\det(I) = 1$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Uträkning av $\det(A)$.
    - 2×2: formel.
    - 3×3: formel eller Sarrus (men se även nedan.)
    - $n \times n$, $n > 3$:
        - $\det(A)$ lätt att räkna ut om A är övertriangulär - "gör om" A till övertriangulär mha radoperationer.
        - Utveckling efter rad/kolonn (speciellt om en rad/kolonn har många nollor.)

- Determinanter och ekvationssystem
    - Om A är kvadratisk har ekvationssystemet $Ax = b$
        - *precis en* lösning oavsett vad b är om $\det(A) \neq 0$.
        - ingen, eller oändligt många lösningar (det beror på b) om $\det(A) = 0$.
- Ickekvadratiska system: om $Ax = b$ har fler obekanta än ekvationer så har:
    - $Ax = 0$ oändligt många lösningar.
    - $Ax = b$, $b \neq 0$ antingen oändligt många lösningar, eller ingen lösning.
- Baser, beroende, oberoende.
    - *Linjärkombination*: uttryck på formen

      $$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_kv_k$$

      där $v_1, v_2, \ldots, v_k$ är vektorer och $x_1, \ldots x_k$ skalärer.
    - *Linjärt oberoende*:

      $$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_kv_k = 0$$

      endast om $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$.
    - *Linjärt beroende*: kan hitta $x_1, \ldots, x_k$, ej alla lika med noll, så att

      $$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_kv_k = 0.$$
    - Kolonnvektorer i en kvadratisk matris är oberoende $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
    - *Bas* för $\mathbb{R}^n$: samling vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_k$ så att
        - $v_1, v_2, \ldots, v_k$ är *oberoende.*
        - *Alla* $w \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas som

          $$w = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_kv_k.$$

          ($x_1, x_2, \ldots, x_k$ kallas *koordinater för w i basen $v_1, \ldots, v_k$*.)
    - Om $v_1, v_2, \ldots, v_n$ är *oberoende* vektorer i $\mathbb{R}^n$ bildar de en bas.
- Inverser
    - Om A är kvadratisk matris och B är en matris så att $AB = BA = I$ (där I är identitetsmatrisen) är A *inverterbar.* Matrisen B skrivs oftast som A^{-1}.
    - A inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
    - Hur finna A^{-1}? Ställ upp ekvationssystem $(A|I)$ och gör radoperationer tills du får $(I|B)$; B är då inversen till A.
    - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- Egenvärden/egenvektorer
  - Om A är kvadratisk matris, $v \neq 0$ en vektor och $\lambda \in \mathbb{R}$ så att
  $$Av = \lambda v$$
  säger vi att v är en *egenvektor* till A med *egenvärdet* λ.
  - Hur hitta egenvärden? Lös ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$.
  - Hur hitta egenvektor? Om $\det(A - \lambda I) = 0$ så har $(A - \lambda I)x = 0$ icketriviala lösningar - lös ekvationssystemet!
  - När kan vi hitta bas av egenvektorer?
    * Spektralsatsen: en $n \times n$-matris A har n stycken ortogonala egenvektorer $\Leftrightarrow A^t = A$.
    * Om $\det(A - \lambda I) = 0$ har n stycken olika lösningar för en $n \times n$-matris A, så har A n stycken oberoende egenvektorer.
  - Om $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_k v_k$ och $v_1, \ldots, v_k$ är egenvektorer till en matris A, så är
  $$A^n w = x_1 \lambda_1^n v_1 + x_2 \lambda_2^n v_2 + \ldots + x_k \lambda_k^n v_k$$
  - Följd: Om $\lambda_1 = 1$ och övriga egenvärden har belopp mindre än ett så är systemet *stabilt*, dvs $A^n w$ går mot $x_1 v_1$ då $n \to \infty$.
- Basbyten
  - Låt $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ("gammal bas") och $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ ("ny bas") vara baser för $\mathbb{R}^n$, med basbytesmatris P (dvs, $f = eP$.)
  - *Koordinatvektorn* X_e för en vektor $x \in \mathbb{R}^n$ i basen e definieras av
  $$x = eX_e$$
  - Koordinatbyte: samband mellan koordinatvektorerna X_e och X_f ges av:
  $$X_e = PX_f, \quad X_f = P^{-1} X_e$$
  - Om e och f är ON-baser så är P en ON-matris, och således är $X_e = PX_f, \quad X_f = P^t X_e$.
  - Låt e vara bas för $\mathbb{R}^m$, och låt P vara basbytesmatrisen från standardbasen (för $\mathbb{R}^m$) till e. Låt f vara bas för $\mathbb{R}^n$, med basbytesmatris Q (från standardbasen för $\mathbb{R}^n$.) Om $y = Ax$ för en matris A, och koordinaterna X_e, Y_f för x, y ges av
  $$x = PX_e, \quad y = QY_f$$
  så gäller följande relation för de nya koordinaterna:
  $$Y_f = A_{ef} X_e$$
  där matrisen A_{ef} ges av
  $$A_{ef} = Q^{-1} AP$$
  - Specialfall: om $m = n$, $e = f$ (och därför $P = Q$) gäller:
  $$Y_e = A_{ee} X_e$$
  där
  $$A_{ee} = P^{-1} AP$$
- Diagonalisering: givet kvadratisk matris A, hitta *diagonal* matris D och *inverterbar* matris P så att
$$A = PDP^{-1}$$

- Kan diagonalisera en $n \times n$-matris $A \Leftrightarrow$ matrisen A har n oberoende egenvektorer.
  - Om $v_1, v_2, \ldots, v_n$ är egenvektorer till A, med egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, så är $P = (v_1 v_2 \cdots v_n)$ och D är diagonalmatrisen med $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ på diagonalen.
- Om $A = PDP^{-1}$ så är $A^n = PD^nP^{-1}$. (Poäng: D^n lätt att beräkna.)