TENTAMEN i SF1646, Analys i flera variabler, 6 hp, för I1, läsåret 2007.2008.

Anders Karlsson, Inst för Matematik, KTH

10 mars, 2008

- Inga hjälpmedel. Skrivtid 8:00-13:00.
- Varje uppgift ger maximalt 3p, för godkänt krävs minst 12p. Godkänt på KS nr i ger automatisk full poäng på tal nr i.
- Slarvigt skrivna lösningar ger avdrag. Endast svar ger 0p.

1. Låt $u(t,s) = f(ts)$ där f är en deriverbar funktion av en variabel. Visa att
$$t\frac{\partial u}{\partial t} - s\frac{\partial u}{\partial s} = 0.$$
(Var noga med att få alla ingående uttryck helt korrekta.)

2. Beräkna
$$\int\int_D x\,dx\,dy$$
där D är det begränsade område som definieras av att $y \leq 1$ och $y \geq x^2$.

3. Beräkna kurvintegralen
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$
där $\mathbf{F}(x,y) = (y^2, 2xy)$ från $(0,0)$ till $(1,1)$ längs kurvan $y = x^2$.

4. Ytan Y ges på parameterform av $\mathbf{r}(s,t) = (s\cos t, s\sin t, t)$ där $0 \leq s \leq 1$ och $0 \leq t \leq \pi$. Ytan har en massbeläggning med densiteten ρ, som uttryckt i parametrarna är $\rho(s,t) = st$. Beräkna ytans massa
$$m = \int\int_Y \rho dS.$$

5. Höjden z av en viss kulle beskrivs av $z = f(x,y)$ där
$$f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2.$$
Bestäm en ekvation för tangentplanet till kullen i punkten $P = (2,1,4)$.

6. Givet ett klot $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$. Bestäm den maximala volymen av ett rätblock (en rektangulär box) inuti klotet. (Av symmetriskäl kan man anta att sidorna är parallella med koordinatplanen. Man kan också anta att hörnen ligger på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.)

7. Beräkna volymen av "glass-struten" K definierad av ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dvs
$$K = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ och } z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}.$$

8. Temperaturen i $\mathbb{R}^3$ ges av $T(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 + xz^2)$ och anses konstant med avseende på tiden. En fluga flyger längs kurvan som ges av att $y = 2$ och $z - 2\ln x = 0$. Riktningen är sådan att flugans z-koordinat är växande. Antag att flugans fart är 1 i punkten $(2, 2, 2\ln 2)$. I vilken takt erfar flugan att temperaturen runt omkring sig förändras i detta ögonblick?

9. Givet ett vektorfält $\mathbf{G}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ där $(x,y) \neq (0,0)$.

   a) (1p) Låt C vara den slutna kurvan $(x-10)^2 + (y-10)^2 = 1$ positivt orienterad. Beräkna
   $$\int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}.$$

   b) (2p) Låt γ vara en sluten, enkel C^1-kurva som undviker origo och går medurs ett varv runt origo. Beräkna
   $$\int_\gamma \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}.$$

Lycka till!