Kortfattade lösningar till TENTAMEN i SF1646, Analys i flera variabler, 6 hp, för I1, läsåret 2007.2008.

Anders Karlsson, Inst för Matematik, KTH

10 mars, 2008

1. *Låt $u(t,s) = f(ts)$ där f är en deriverbar funktion av en variabel. Visa att*

$$t\frac{\partial u}{\partial t} - s\frac{\partial u}{\partial s} = 0.$$

(Var noga med att få alla ingående uttryck helt korrekta.)

Kedjeregeln ger att

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f'(ts)s \text{ och } \frac{\partial u}{\partial t} = f'(ts)t$$

så att

$$VL = t\frac{\partial u}{\partial t} - s\frac{\partial u}{\partial s} = tsf'(ts) - tsf'(ts) = 0 = HL. \text{ VSV.}$$

2. *Beräkna*

$$\int\int_D xdxdy$$

där D är det begränsade område som definieras av att $y \leq 1$ och $y \geq x^2$.

Rita en figur. Därifrån inses att

$$\int\int_D xdxdy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xdxdy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (y-y)dy = \frac{1}{2}\int_0^1 0dy = 0$$

vilket man kunde ha insett på direkten: x är en udda funktion och integrationsområdet är symmetriskt runt $x = 0$.

3. *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

där $F(x, y) = (y^2, 2xy)$ *från* $(0, 0)$ *till* $(1, 1)$ *längs kurvan* $y = x^2$.

Vi parametriserar kurvan $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$ där t går från 0 tll 1. Derivering ger $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t)$. Således

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^4, 2t^3) \cdot (1, 2t)dt = \int_0^1 t^4 + 4t^4 dt = \left[t^5\right]_0^1 = 1.$$

4. *Ytan* Y *ges på parameterform av* $r(s, t) = (s \cos t, s \sin t, t)$ *där* $0 \leq s \leq 1$ *och* $0 \leq t \leq \pi$. *Ytan har en massbeläggning med densiteten* ρ, *som uttryckt i parametrarna är* $\rho(s, t) = st$. *Beräkna ytans massa*

$$m = \int\int_Y \rho dS.$$

Vi deriverar: $\mathbf{r}'_t(t, s) = (-s \sin t, s \cos t, 1)$ och $\mathbf{r}'_s(t, s) = (\cos t, \sin t, 0)$. Vidare ger detta

$$dS = |\mathbf{r}'_t \times \mathbf{r}'_s|\, dsdt = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + s^2} dsdt = \sqrt{1 + s^2} dsdt.$$

Således

$$m = \int\int_Y \rho dS = \int_0^\pi \int_0^1 ts\sqrt{1 + s^2} dsdt = \int_0^\pi t \left[\frac{(1 + s^2)^{3/2}}{3}\right]_0^1 dt$$
$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}(2\sqrt{2} - 1).$$

5. *Höjden* z *av en viss kulle beskrivs av* $z = f(x, y)$ *där*

$$f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2.$$

Bestäm en ekvation för tangentplanet till kullen i punkten $P = (2, 1, 4)$.

Kullen ges av nivåytan $F(x, y, z) = 0$ där $F(x, y, z) = z - x^2 + xy - 2y^2$. Normalvektor ges av

$$\operatorname{grad} F = (-2x + y, x - 4y, 1)$$

vilket i den aktuella punkten blir $(-4+1, 2-4, 1) = (-3, -2, 1)$. Tangentplanets ekvation blir då

$$-3(x-2) - 2(y-1) + (z-4) = 0$$

eller

$$-3x - 2y + z = -4.$$

Alternativt: Från differentierbarhet: $z = f(2,1) + f'_x(2,1)(x-2) + f'_y(2,1)(y-1)$ vilket ger samma svar: $z = 4 + 3(x-2) + 2(y-1)$.

6. *Givet ett klot $x^2+y^2+z^2 \le 3$. Bestäm den maximala volymen av ett rätblock (en rektangulär box) inuti klotet. (Av symmetriskäl kan man anta att sidorna är parallella med koordinatplanen. Man kan också anta att hörnen ligger på sfären $x^2+y^2+z^2 = 3$.)*

Låt de åtta hörnen av rätblocket vara $(\pm x, \pm y, \pm z)$ med x, y, z alla positiva. Dess volym är då $V = 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz$. Denna ska maximeras under bivillkoret att $g(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-3 = 0$. Lagrange ger

$$8yz = \lambda 2x,\ 8xz = \lambda 2y,\ \text{och } 8xy = \lambda 2z.$$

Vi multiplicerar ekvationerna med x, y, och z respektive och får då:

$$8xyz = \lambda 2x^2,\ 8xyz = \lambda 2y^2,\ \text{och } 8xyz = \lambda 2z^2,$$

vilket ger att $\lambda 2x^2 = \lambda 2y^2 = \lambda 2z^2$. Eftersom $V = 0$ om någon av variablerna är noll, så har vi när vi söker maximum att $\lambda \neq 0$. Det följer att $x^2 = y^2 = z^2$. Insatt i ekvationen $g(x,y,z) = 0$ ger

$$3x^2 - 3 = 0$$

vilket ger $x = 1$ ($x = -1$ förkastas eftersom $x > 0$), och i sin tur $y = 1$ och $z = 1$.Givet situationen vi betraktar inser vi att det är fråga om ett maximum. Svar: maximal volym är 8 (jämför det med klotets volym $4\pi\sqrt{3} \approx 21.8$).

7. *Beräkna volymen av "glass-struten" K definierad av ytorna $x^2+y^2+z^2 = 1$ och $z = \sqrt{x^2+y^2}$ dvs*

$$K = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1 \text{ och } z \ge \sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

De två ytorna skär varandra i $2(x^2+y^2) = 1$ och $z = 1/\sqrt{2}$. Den sfäriska vinkelkoordinaten θ löper därför från 0 till $\pi/4$. Volymen blir därmed isfäriska koordinater

$$V = \int\int\int_K dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = 2\pi \int_0^{\pi/4} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \sin\theta d\theta$$
$$= \frac{2\pi}{3}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{3}.$$

8. *Temperaturen i R^3 ges av $T(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 + xz^2)$ och anses konstant med avseende på tiden. En fluga flyger längs kurvan som ges av att $y = 2$ och $z - 2\ln x = 0$. Riktningen är sådan att flugans z-koordinat är växande. Antag att flugans fart är 1 i punkten $(2, 2, 2\ln 2)$. I vilken takt erfar flugan att temperaturen runt omkring sig förändras i detta ögonblick?*

Temperaturgradienten är $\nabla T(x,y,z) = (2x + z^2, -2y, 2z + 2xz)$ och i den aktuella punkten

$$\nabla T(2, 2, 2\ln 2) = (4 + 4(\ln 2)^2, -4, 12\ln 2).$$

Flugans kurva parametriseras enligt $\mathbf{r}(t) = (t, 2, 2\ln t)$. Derivering ger en tangentriktningen $\mathbf{r}'(t) = (1, 0, 2/t)$. När t växer så ökar z koordinaten av $\mathbf{r}(t)$. Så flugan rör sig i rktningen

$$\mathbf{r}'(2) = (1, 0, 1).$$

Dess fart var 1 enligt texten, detta ger att flugans hastighetsvektor i den aktuella punkten är

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1).$$

Det efterfrågade värdet är då riktningsderivatan

$$T'_v = \nabla T \cdot v = (4 + 4(\ln 2)^2, -4, 12\ln 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(4 + 4(\ln 2)^2 + 12\ln 2).$$

9. *Givet ett vektorfält $G(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ där $(x,y) \neq (0,0)$.*

a) (1p) Låt C vara den slutna kurvan $(x-10)^2 + (y-10)^2 = 1$ positivt orienterad. Beräkna

$$\int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}.$$

b) (2p) Låt γ vara en sluten, enkel C^1-kurva som undviker origo och går medurs ett varv runt origo. Beräkna

$$\int_\gamma \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}.$$

a) Eftersom $\mathbf{G}$ är kontinuerligt deriverbar innan för aktuell cirkel (som ligger på betryggande avstånd från origo) dvs området D cirkelskiva med radie 1 och centrum i (10,10), gäller Green's sats

$$\int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) dxdy = 0$$

pga av att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial x}.$$

b) Nu kan inte Green's formel användas direkt. Vi börjar istället beräkna

$$\int_{C_R} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$$

för en cirkel med radie R och centrum i origo, orienterad moturs. Efter parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$ får vi

$$\int_{C_R} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-R\sin t}{R^2}, \frac{R\cos t}{R^2}\right)(-R\sin t, R\cos t)dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}{R^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Om R väljs tillräckligt stort kan vi betrakta A_R området mellan C_R och den givna kurvan γ. Då är $\partial A_R = C_R \cup \gamma$ med positiv orientering. I detta område, som inte innehåller problempunkten $(0,0)$, kan Green tillämpas och ger pga samma kalkyl som i a) att

$$\int_\gamma \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_R} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial A_R} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \int \int_{A_R} 0 dxdy = 0,$$

vilket ger svaret

$$\int_\gamma \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = -2\pi.$$