Övningsuppgifter på Del 1, SF1646

1. Visa att funktionen
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$$
löser värmeledningsekvationen $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

2. Beräkna nedan gränsvärde om det existerar eller i annat fall visa att det inte existerar:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}.$$

3. Finn gradienten till $f(x,y) = \sqrt{1+xy^2}$ i punkten $(2,-2)$ och bestäm tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i samma punkt.

4. Låt
$$f(t,s) = \frac{t}{1+s}.$$
Beräkna derivatan av f i punkten $t = 0$, $s = 0$ i riktningen $(1,-1)$ i ts-planet.

5. Bestäm differentialen till $f(p,V,T) = pV/T$.

6. En kurva ges av $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos 2t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

7. Antag att funktionerna $u(x,y)$ och $v(x,y)$ är två gånger kontinuerliga partiellt deriverbara och uppfyller Cauchy-Riemann's ekvationer
$$u'_x = v'_y \text{ och } v'_x = -u'_y.$$
Visa att u är harmonisk, dvs $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$. (v är också harmonisk).

8. Derivera med avseende på x följande funktioner (f antas deriverbar) a) $f(2x,3y)$ b) $u = \sqrt{t^2+s^2}$ där $t = e^{xy}$ och $s = 1 + y^2 \cos x$.

9. In a certain community there are two breweries. If brewery A produces x liters of beer per month and brewery B produces y liters,then a model predicts that their respective profits P_A and P_B are
$$P_A = 2x - \frac{2x^2+y^2}{10^6} \text{ and } P_B = 2y - \frac{4y^2+x^2}{2\cdot 10^6}.$$

Should they compete or cooperate in order to maximize their profits? (Maximize P_A and P_B as function of only one variable, x and y respectively, compared with maximizing the sum depending on both x and y.)

10. Bestäm funktionalmatrisen och dess determinant till transformationen

$$\left\{ \begin{array}{c} x = ar\cos\phi \\ y = br\sin\phi \end{array} \right\}$$

där a och b är konstanter.

11. Antag att $g(10,1) = 37.5$ och $g'_{x_1}(10,1) = 2$ och $g'_{x_2}(10,1) = -1$. Man önskar hålla värdet på g konstant, man kan inte kontrollera första variablen x_1 men dock den andra x_2. Om x_1 sjunker med 0.3, hur ska vi justera x_2 för att bibehålla $g \approx 37.5$?

Svar

1. En av matematikens mest fundamentala funktioner.
2. Existerar ej. T ex jämför $x = 0$ låt y gå mot 0, och $x = y \to 0$.
3. $\mathrm{grad} f(2,-2) = (2/3, -4/3)$. $2x - 4y - 3z = 3$ (t ex).
4. $1/\sqrt{2}$
5. Se boken sid 114.
6. $t = \pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$ och $7\pi/4$
7. Bra gjort.
8. a) $2f'_u(u,v)$ där $u = 2x$ och $v = 3y$ b) $(t^2y - sy^2\sin x)/\sqrt{t^2+s^2}$
9. First scenario: total profit \$625,000 and second scenario: \$733,333.
10. abr
11. Minska x_2 med 0.6