

## Övningsuppgifter på Del 3, SF1646

1. Beräkna integralen

$$\iiint_R (x^2 + y^2) dV$$

där  $R$  är kroppen innanför sfären  $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$  men utanför cylindern som definieras genom  $x^2 + y^2 = a^2$ .

2. Beräkna

$$\iiint_Q (s^2 + t^2) ds dt du$$

över kuben  $0 \leq s, t, u \leq 1$ .

3. Betrakta en cirkel med centrum i origo i  $xy$ -planet med radie  $a$ . Låt  $C$  vara halvcirkeln definierad av  $y \geq 0$ . Givet en massbeläggning med konstant densitet (kan anta att  $\rho = 1$ ). Beräkna dess masscentrum.

4. Givet vektorfältet  $\mathbf{F} = (y, -x)$ . Bestäm

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

från  $(1, 0)$  till  $(0, -1)$  längs a) linjesegmentet dem emellan och b) trekvarts cirkel av radie 1, motsols mellan punkterna.

5. Låt  $\mathbf{G} = (x, 0)$ . Beräkna

$$\int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$$

där  $C$  är en cirkel av godtycklig radie med centrum i origo.

6. Beräkna

$$\int_C \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \cdot d\mathbf{r}$$

där  $C$  är en sluten kurva (av ditt eget val) som undviker origo och går precis ett varv moturs runt origo.

7. Beräkna

$$\iiint_K z dx dy dz$$

där  $K$  är enhetsklotet  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

8. Låt  $T$  vara tetrahedern med hörn i  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  och  $(0, 0, 1)$ .  
Beräkna

$$\int \int \int_T y dx dy dz.$$

9. Finn volymen av området som ligger under planet  $z = 3 - 2y$  och över ytan  $z = x^2 + y^2$ .
10. Man vet att ett klot med radie  $R$  har volymen  $4\pi R^3/3$ . Beräkna volymen av

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

11. Kom ihåg att öva på Green's formel innan tentan! Ingår dock inte i KS3.

### Svar

1.  $44\sqrt{3}\pi a^5/5$ .
2.  $2/3$ .
3.  $x_C = 0$ ,  $y_C = 2a/\pi$ .
4. a) 1 b)  $-3\pi/2$ .
5. 0
6.  $2\pi$  (Svaret oberoende av sådana  $C$ ; lämpligt val är enhetscirkel med centrum i origo).
7. 0 (tänk; utan att räkna)
8.  $1/24$ .
9.  $8\pi$  volymsenheter.
10.  $4\pi abc/3$
11. Det är allvar.