Talet 19.2 från övningsboken.

$$F = (P, Q) = (e^x, 1 + xy^2)$$

ska integreras längs en viss halvcirkel C_1 i $x \geq 0$ planet från (0,-1) till (0,1).

Lösning: låt C_2 vara linesegmentet $(0, 1-t)$ där t går från t=0 till $t = 2$. Villkoren för Green är uppfyllda (viktigt!) så vi har

$$\begin{aligned}
\int_{C_1+C_2} Pdx + Qdy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \left(r^2 \sin^2 \phi - 0 \right) r dr d\phi = \\
&= \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \phi d\phi = \{\cos 2\phi = 1 - 2 \sin^2 \phi\} \\
&= \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\phi) d\phi = \\
&= \frac{1}{8} \left[\phi - \frac{\sin 2\phi}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{8} \left[\pi/2 - 0 - (-\pi/2 - 0) \right] \\
&= \pi/8.
\end{aligned}$$

Dessutom

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} Pdx + Qdy &= \int_0^2 e^0 0 dt + (1 + 0(1-t)^2)(-dt) \\
&= -\int_0^2 dt = -2.
\end{aligned}$$

(OBS jag har för mig att jag fick bara 2 på föreläsningen...).

Sammanfattningsvis

$$\begin{aligned}
\int_{C_1+C_2} Pdx + Qdy &= \pi/8 \\
\int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy &= \pi/8 \\
\int_{C_1} Pdx + Qdy - 2 &= \pi/8
\end{aligned}$$

dvs

$$\int_{C_1} Pdx + Qdy = \frac{\pi}{8} + 2$$

vilket är vårt SVAR.

Kommentar: ganska typisk uppgift. svårt om inte omöjligt att integrera $\int_{C_1} Pdx + Qdy$ direkt. Green är fin.