Kontrollskrivning, 2008-04-10, kl. 10.15–12.00.

SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner, för E.

Kontrollskrivning MODUL 1. Skriv **program:** **samt namn och personnummer:**

1. (MODUL 1) Betrakta fältet

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad}\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^n}\right),$$

där n är ett reellt tal, $\mathbf{r}$ är ortsvektorn, r dess belopp, och $\mathbf{a}$ är en konstant vektor. Förenkla med hjälp av nablakalkyl uttrycket för $\mathbf{A}$ så långt det går. Finns det något val av $\mathbf{a}$ och n så att $\mathbf{A}$ blir divergensfritt? Rotationsfritt?

En kalkyl som bygger på kedjeregeln ger att

$$\nabla(r^{-n}) = -n\,\frac{\mathbf{r}}{r^{n+2}},$$

så att

$$\mathbf{A} = \nabla\big(r^{-n}\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\big) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\nabla(r^{-n}) + r^{-n}\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = -n\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^{n+2}}\,\mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}}{r^n}.$$

Eftersom $\mathbf{A}$ är ett gradientfält är det konservativt, och därför rotationsfritt för alla val av $\mathbf{a}$ och n. Divergensen då? Vi räknar:

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^{n+2}}\,\mathbf{r} = \nabla\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^{n+2}}\right)\cdot\mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^{n+2}}\,\nabla\cdot\mathbf{r} = \nabla\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^{n+2}}\right)\cdot\mathbf{r} + 3\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^{n+2}},$$

där vi ser att gradienten är av precis samma typ som $\mathbf{A}$, så att

$$\nabla\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^{n+2}}\right) = -(n+2)\,\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^{n+4}}\,\mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}}{r^{n+2}}.$$

Detta ger att

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^{n+2}}\,\mathbf{r} = -(n+2)\,\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^{n+4}}\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}}{r^{n+2}}\cdot\mathbf{r} + 3\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^{n+2}},$$

vilket vi förenklar till

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^{n+2}}\,\mathbf{r} = (2-n)\,\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^{n+2}}.$$

På samma vis får vi fram att

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{a}}{r^n} = -n\,\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^{n+2}},$$

så att

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = -n\operatorname{div}\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^{n+2}}\,\mathbf{r} + \operatorname{div}\frac{\mathbf{a}}{r^n} = n(n-3)\,\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^{n+2}}.$$

Vi får divergensfrihet om $n=0$ eller $n=3$, eller förstås om $\mathbf{a}$ är nollvektorn.

---

2. (MODUL 1) Då en stel kropp K roterar med vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}$ (en konstant vektor) så ges hastigheten $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ i en godtycklig punkt $\mathbf{r}\in K$ av

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}.$$

Beräkna $\operatorname{rot}\mathbf{v}$.

Enligt formel gäller att

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{r} + (\nabla \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega},$$

men eftersom $\boldsymbol{\omega}$ är en konstant vektor förenklas uttrycket till

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = -(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{r} + (\nabla \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega}.$$

Vi ser att

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla = \omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z},$$

så att

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{r} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \boldsymbol{\omega}.$$

Det följer att

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = -\boldsymbol{\omega} + 3\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega}.$$