Kontrollskrivning, 2008-04-10, kl. 10.15–12.00.

SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner, för E.

Kontrollskrivning MODUL 2. Skriv **program:** **samt namn och personnummer:**

1. (MODUL 2) Ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem (u, v, w) definieras genom

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv\cos(w), \quad z = 2uv\sin(w).$$

Visa detta! Bestäm sedan den allmänna lösningen till Laplaces ekvation $\Delta\Phi = 0$ som beror enbart på u (och inte av v, w).

Med $\mathbf{r} = (x, y, z)$ har vi

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (2u, 2v\cos(w), 2v\sin(w)), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-2v, 2u\cos(w), 2u\sin(w)),$$

samt

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = (0, -2uv\sin(w), 2uv\cos(w)).$$

Vi beräknar att

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = 0,$$

så att vi får ett ortogonalt system. Motsvarande skalfaktorer är

$$h_u = h_v = \sqrt{2u^2 + 2v^2}, \quad h_w = 2|uv| = 2uv,$$

om vi antar att $u \geq 0$ och $v \geq 0$. Enligt formeln för Lapace-operatorn är

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) + \left(\frac{h_u h_w}{h_v}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial \Phi}{\partial w}\right)\right\}.$$

Om nu Φ bara beror på u blir

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) = \frac{1}{4uv(u^2 + v^2)}\frac{\partial}{\partial u}\left(2uv\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)$$

så att om $\nabla^2\Phi = 0$ blir

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) = 0,$$

med lösning

$$\Phi = C_1 \ln u + C_2.$$

---

2. (MODUL 2) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

där Γ är skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $x + z = 1$. Kurvans projektion på xy-planet är positivt orienterad, och vektorfältet är

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2 + yz\,e^{xyz}, zx + xz\,e^{xyz}, 2xy + xy\,e^{xyz}).$$

Γ är en cirkel i planet $x+z=1$; låt motsvarande cirkelskiva vara S. Dess enhetsnormal är $\hat{\mathbf{n}} = 2^{-1/2}(1,0,1)$. Projektionen på xy-planet fås ur

$$1 = x^2 + y^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + y^2.$$

Efter kvadratkomplettering fås

$$4(x - \tfrac{1}{2})^2 + 2y^2 = 1$$

vilket är en ellips med halvaxlarna $\frac{1}{2}$ och $2^{-1/2}$. Låt D beteckna området innanför ellipsen. Vi beräknar att

$$\nabla \times \mathbf{F} = (x, 2z - 2y, z).$$

Enligt Stokes' sats blir

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS,$$

där $dS = \sqrt{2} dxdy$. Vi får alltså:

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \frac{1}{\sqrt{2}}(x+z)\, dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_S dS = \int_D dxdy.$$

Svaret är alltså arean på ellipsen D, vilken är $2^{-3/2}\pi$.