Kontrollskrivning, 2008-05-05, kl. 13.15–15.00.

SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner, för E.

Kontrollskrivning MODUL 2. Skriv **program:** **samt namn och personnummer:**

1. (MODUL 2) Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F} = (yz, xz, xy)$$

genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

Divergensen av fältet är

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Enligt Gauss' sats innebär detta att flödesintegralen blir noll över varje sluten yta. Halvsfären är inte sluten, men vi kan sluta till den genom att lägga till cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$ i xy-planet. Om vi tänker oss att normalen till halvsfären är riktad uppåt (positiv z-komponent) så har cirkelskivan normal som pekar i negativ z-led. Detta innebär att om vi istället ger normal till cirkelskivan positiv z-riktning så får vi samma flöden genom den som genom den givna halvsfären. Kalla nu cirkelskivan för D; då blir

$$\iint_D \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (yz, xz, xy) \cdot (0, 0, 1)\, dS = \iint_D xy\, dxdy = 0$$

av symmetriskäl (eller polära koordinater).

---

2. (MODUL 2) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

där Γ är ellipsen som är skärningen av $x^2 + 2y^2 = 4$ och $z = 0$. Här är $\mathbf{F} = r(\widehat{\theta} + \widehat{\varphi})$, där $\widehat{\theta}$, $\widehat{\varphi}$ är motsvarande enhetsvektorer i sfäriska koordinater.

Enligt BETA, s. 253, har vi

$$d\mathbf{r} = \widehat{r}\, dr + \widehat{\theta}\, r\, d\theta + \widehat{\varphi}\, r \sin\theta\, d\varphi,$$

så att

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = r^2 d\theta + r^2 \sin\theta\, d\varphi.$$

Detta ger att (vi tänker oass att ellipsen går i positiv led i xy-planet)

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\Gamma r^2 d\theta + r^2 \sin\theta\, d\varphi = \int_\Gamma r^2 \sin\theta\, d\varphi = \int_\Gamma r^2\, d\varphi,$$

eftersom $\theta = \pi/2$ och alltså $d\theta = 0$ längs med kurvan Γ. På ellipsen gäller att

$$r^2(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi) = 4,$$

så att

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 4 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Evalueringen av den sista integralen är inte så väsentligt, men värdet blir slutligen $4\sqrt{2}\pi$.