Kontrollskrivning, 2008-05-08, kl. 13.15–15.00.
SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner, för E.

Kontrollskrivning MODUL 4. Skriv **program:** **samt namn och personnummer:**

1. (MODUL 4) (a) Funktionen $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ antas analytisk i ett område som innehåller punkten $z = 5 + i$. Här tänker vi som vanligt att $z = x + iy$. Vi vet att

$$\frac{\partial v}{\partial x}(5, 1) = 1, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(5, 1) = -2.$$

Bestäm derivatan $f'(5 + i)$.

(b) Bestäm alla analytiska funktioner vars imaginärdel är $x^3 - 3xy^2$.

(a) Vi vet att om f är analytisk så är

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Enligt CR får vi att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Instoppning i punkten $5 + i$ ger att

$$f'(5 + i) = -2 + i.$$

(b) Här finner man att

$$f(z) = i\,z^3 + C,$$

där konstanten C är reell, är den allmänna lösningen.

---

2. (MODUL 4) Antag att $f(z)$ är analytisk i ett område D. Visa att

$$\Delta\big(|f(z)|^4\big) = 16\,|f(z)f'(z)|^2$$

på D, där

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

är Laplace-operatorn.

Vi skriver $f = u + iv$, där u och v är harmoniska, samt $g = (f)^2 = r + is$, där r och s är harmoniska. Då är $r = u^2 - v^2$, $s = 2uv$, och

$$|f|^4 = |g|^2 = r^2 + s^2 = u^4 + v^4 + 2u^2v^2,$$

och vi finner att

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(r^2 + s^2\right) = 2\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 2r\,\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + 2s\,\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}.$$

Motsvarande kalkyl med y istället för x utföres, och vi summerar resultaten:

$$\Delta\left(r^2 + s^2\right) = 2\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + 2u\Delta r + 2\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + 2s\Delta s.$$

Vi använder nu att $g' = 2ff'$ (kedjeregeln), så att

$$4|ff'|^2 = |g'|^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2.$$

Om vi använder att $\Delta r = \Delta s = 0$ samt att CR gäller, får vi att $\Delta\big(|f(z)|^4\big) = 16\,|f(z)f'(z)|^2$.