Tentamensskrivning, 2008-05-26, kl. 08.00–13.00.

SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner, för E.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För betyg C krävs 7 poäng, medan för betyg B krävs 11 poäng, och för betyg A krävs 15 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 2

1. Vi betraktar vektorfältet

$$\mathbf{A} = \sin\theta\,\mathbf{e}_r + \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\,\mathbf{e}_\varphi,$$

angivet i sfäriska koordinater.

(a) Beräkna rot $\mathbf{A}$.

(b) Beräkna om möjligt en skalär potential ϕ till $\mathbf{A}$. (5)

Enligt [BETA, s. 249], har vi

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\cos\theta\right)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\sin\theta - \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}r\cos\theta - \frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\right)\mathbf{e}_\varphi.$$

Detta ger att rotationen blir noll. Detta betder att det (åtminstone lokalt) finns en skalär potential, dvs ett skalärfält U med $\operatorname{grad} U = \mathbf{A}$. Vi ser att

$$U = r\sin\theta + \cos\varphi$$

funkar.

---

2. Betrakta bollen

$$B:\quad x^2 + y^2 + z^2 < 1.$$

Vi intresserar oss för det elektrostatiska kraftfältet

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3},$$

där $\mathbf{r}$ är ortsvektorn och $\mathbf{r}_0$ är positionsvektorn för en punktladdning. Vi kan anta att $\mathbf{r}_0 = (x_0, 0, 0)$, där x_0 är ett positivt tal (eller noll).

(a) Beräkna kraftfältets divergens.

(b) Beräkna flödesintegralen

$$\int_{\partial B} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS,$$

där dS är ytelementet och $\hat{\mathbf{n}}$ den utåtriktade normalen (randen ∂B betecknar enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$). Observera att vi får olika resultat om $\mathbf{r}_0$ är innanför eller utanför sfären. (5)

V.g. vänd!

En direkt nablakalkyl ger att $\mathbf{F}$ är divergensfritt utom i punkten $\mathbf{r}_0$.Detta innebär att om $\mathbf{r}_0$ är utanför bollen B blir flödesintegralen noll. Dessutom följer att om $\mathbf{r}_0$ är innanför B så kan vi byta B mot en annan lämplig yta som innesluter $\mathbf{r}_0$. En sådan annan yta är sfären med radie 1 kring $\mathbf{r}_0$; för denna andra yta är integralen lätt att beräkna: resultatet blir 4π.

---

3. Visa att om S är begränsningsytan till en kropp V, så gäller att

$$\iint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^5}\,\mathbf{r}\,dS = \iiint_V \operatorname{grad} f(r)\,dxdydz.$$

Här är $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ortsvektorn, och $f(r)$ någon funktion av radien $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, vilken skall bestämmas. Dessutom är $\mathbf{n}$ den yttre normalvektorn. Obervera integralerna på båda sidor är vektorvärda! Tips: nablakalkyl är användbart! (5)

Låt $\mathbf{e}$ vara en fix vektor i rummet av längd 1. Då blir

$$\mathbf{e}\cdot\iint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^5}\,\mathbf{r}\,dS = \iint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^5}\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})\,dS = \iint_S (\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})\frac{\mathbf{r}}{r^5}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

och vi har en vanlig skalär flödesintegral som vi kan tillämpa Gauss' sats på. Nu är

$$\operatorname{div}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})\frac{\mathbf{r}}{r^5} = \nabla(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^5} + (\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})\operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r^5}$$

och lite ytterligare nablakalkyl ger

$$\nabla(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{e}, \qquad \operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r^5} = -\frac{2}{r^5},$$

så att

$$\operatorname{div}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})\frac{\mathbf{r}}{r^5} = -\frac{\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}}{r^5}.$$

Enligt Gauss' sats gäller nu att

$$\mathbf{e}\cdot\iint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^5}\,\mathbf{r}\,dS = -\iiint_V \frac{\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}}{r^5}\,dxdydz = -\mathbf{e}\cdot\iiint_V \frac{\mathbf{r}}{r^5}\,dxdydz.$$

Funktionen

$$f(r) = \frac{1}{3r^3}$$

har gradienten

$$\operatorname{grad} f(r) = -\frac{\mathbf{r}}{r^5},$$

och därför gäller

$$\mathbf{e}\cdot\iint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^5}\,\mathbf{r}\,dS = \mathbf{e}\cdot\iiint_V \operatorname{grad} f(r)\,dxdydz.$$

Eftersom vektorn $\mathbf{e}$ är godtycklig, måste också gälla att

$$\iint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^5}\,\mathbf{r}\,dS = \iiint_V \operatorname{grad} f(r)\,dxdydz.$$

---

4. Antag att $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, är analytisk i ett område D, och låt Z_f beteckna mängden av rötter till ekvationen $f(z) = 0$; vi antar att rötternas antal är ändligt. Visa att funktionen $\ln |f(z)|$ är harmonisk i D bortsett från mängden Z_f. (5)

Vi skall visa att

$$\ln \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2)$$

är harmonisk. Med lite enkla beräkningar baserade på CR kan vi visa att $\Delta \ln(u^2+v^2) = 0$. Alternativt kan vi observera att $\ln |f|$ är realdel till den analytiska funktionen $\log f$, som är väldefinierad (lokalt) utom då $f = 0$.