

Tentamensskrivning, 2008-05-26, kl. 08.00–13.00.

SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner, för E.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För betyg C krävs 7 poäng, medan för betyg B krävs 11 poäng, och för betyg A krävs 15 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 2

1. Vi betraktar vektorfältet

$$\mathbf{A} = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi,$$

angivet i sfäriska koordinater.

(a) Beräkna rot \mathbf{A} .(b) Beräkna om möjligt en skalär potential ϕ till \mathbf{A} . (5)

2. Betrakta bollen

$$B : x^2 + y^2 + z^2 < 1.$$

Vi intresserar oss för det elektrostatiske kraftfältet

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3},$$

där \mathbf{r} är Ortsvektorn och \mathbf{r}_0 är positionsvektorn för en punktladdning. Vi kan anta att $\mathbf{r}_0 = (x_0, 0, 0)$, där x_0 är ett positivt tal (eller noll).

(a) Beräkna kraftfältets divergens.

(b) Beräkna flödesintegralen

$$\int_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS,$$

där dS är ytelementet och $\hat{\mathbf{n}}$ den utåtriktade normalen (randen ∂B betecknar enhets sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$). Observera att vi får olika resultat om \mathbf{r}_0 är innanför eller utanför sfären. (5)

3. Visa att om
- S
- är begränsningsytan till en kropp
- V
- , så gäller att

$$\iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^5} \mathbf{r} dS = \iiint_V \text{grad } f(r) dx dy dz.$$

Här är $\mathbf{r} = (x, y, z)$ Ortsvektorn, och $f(r)$ någon funktion av radien $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, vilken skall bestämmas. Dessutom är \mathbf{n} den yttre normalvektorn. Observera integralerna på båda sidor är vektorvärda! Tips: nablakalkyl är användbart! (5)

4. Antag att
- $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
- ,
- $z = x + iy$
- , är analytisk i ett område
- D
- , och låt
- Z_f
- beteckna mängden av rötter till ekvationen
- $f(z) = 0$
- ; vi antar att rötternas antal är ändligt. Visa att funktionen
- $\ln |f(z)|$
- är harmonisk i
- D
- bortsett från mängden
- Z_f
- . (5)