Tentamensskrivning, 2008-05-26, kl. 08.00–13.00.

SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner, för E.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg krävs minst 4 av 5 moduler godkända (Del 1). För överbetyg krävs dessutom deltagande i Del 2. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 1

1. [MODUL 1] Undersök om vektorfältet

$$\mathbf{F} = (x^2 - y^2, axz, bxz)$$

har en vektorpotential, beroende på värdena på konstanterna a, b. Bestäm i så fall en sådan. Kom ihåg: en vektorpotential $\mathbf{A}$ till $\mathbf{F}$ löser $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{F}$.

För att vektorfältet ska ha en vektorpotential måste divergensen vara noll, dvs

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(axz) + \frac{\partial}{\partial z}(bxz) = 2x + bx = 0,$$

vilket är uppfyllt precis då $b = -2$. Parametern a får vara vad som helst. Vi ser att

$$\mathbf{A} = (axz^2/2, y^2 z - x^2 z, 0)$$

är en lösning.

---

2. [MODUL 2] Ett (krok)linjigt koordinatsystem (u, v, w) definieras genom

$$(u, v, w) = (x + az, y + bx, z + cx + dy),$$

där (x, y, z) betecknar ortsvektorn i vanliga koordinater. Bestäm vad konstanterna a, b, c, d ska vara för att koordinatbytet ska vara ortogonalt. Beräkna därefter (i detta fall) divergensen av vektorfältet

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_u + \mathbf{e}_v + \mathbf{e}_w,$$

där $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{e}_w$ betecknar motsvarande kroklinjiga enhetsvektorer.

Eftersom $u = x + az$, $v = y + bx$, och $w = z + cx + dy$, har vi

$$\nabla u = (1, 0, a), \quad \nabla v = (b, 1, 0), \quad \nabla w = (c, d, 1),$$

och således

$$\nabla u \cdot \nabla v = b, \quad \nabla u \cdot \nabla w = c + a, \quad \nabla v \cdot \nabla w = bc + d.$$

För att dessa ska vara ortogonala måste $b = d = 0$ samt $c + a = 0$. Koordinatbytet blir då

$$(u, v, w) = (x + az, y, z - ax),$$

och associerade enhetsvektorer blir

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}(1, 0, a), \quad \mathbf{e}_v = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_w = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}(-a, 0, 1).$$

Detta innebär att

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_u + \mathbf{e}_v + \mathbf{e}_w = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}(1, 0, a) + (0, 1, 0) + \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}(-a, 0, 1),$$

vilket är ett konstant vektorfält. Divergensen är därför lika med noll.

---

3. [MODUL 3] Hitta en lösning till

$$\nabla^2 u = (x^2 + y^2 + z^2)^3, \quad \text{på} \quad B_3,$$

där B_3 är enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, med randvärde konstant lika med 8 på enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Vi letar efter en funktion u som bara beror på r. Enligt [BETA, s. 249] ska vi lösa

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = r^6.$$

Detta innebär att

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = r^8,$$

med allmän lösning

$$r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{r^9}{9} + C_1,$$

så att

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{r^7}{9} + \frac{C_1}{r^2}.$$

Vi vill inte ha en lösning som är singulär i origo, vilket gör att vi sätter $C_1 = 0$. Då får vi

$$u = \frac{r^8}{72} + C_2.$$

På enhetsklotet $r = 1$ blir

$$u = \frac{1}{72} + C_2 = 8,$$

så att

$$C_2 = 8 - \frac{1}{72} = \frac{575}{72}.$$

Den sökta lösningen blir alltså

$$u = \frac{1}{72}(x^2 + y^2 + z^2)^4 + \frac{575}{72}.$$

---

4. [MODUL 4] Låt $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, där $z = x + iy$, vara en analytisk funktion. Skriv den sammansatta funktionen $F(z) = e^{f(z)}$ i termer av real- och imaginärdel, samt visa (med hjälp av CR ekvationerna för $f = u + iv$) att funktionen $F(z)$ blir analytisk.

Vi får att

$$F = e^f = e^{u+iv} = e^u \cos v + ie^u \sin v = U + iV,$$

med

$$U = e^u \cos v, \qquad V = e^u \sin v.$$

Vi ska undersöka om

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Klart är att

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^u \cos v \, \frac{\partial u}{\partial x} - e^u \sin v \, \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = e^u \cos v \, \frac{\partial u}{\partial y} - e^u \sin v \, \frac{\partial v}{\partial y},$$

samt

$$\frac{\partial V}{\partial x} = e^u \sin v \, \frac{\partial u}{\partial x} + e^u \cos v \, \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = e^u \sin v \, \frac{\partial u}{\partial y} + e^u \cos v \, \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Enligt CR för u, v blir

$$\frac{\partial V}{\partial y} = e^u \sin v \, \frac{\partial u}{\partial y} + e^u \cos v \, \frac{\partial v}{\partial y} = -e^u \sin v \, \frac{\partial v}{\partial x} + e^u \cos v \, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x},$$

samt

$$\frac{\partial V}{\partial x} = e^u \sin v \, \frac{\partial u}{\partial x} + e^u \cos v \, \frac{\partial v}{\partial x} = e^u \sin v \, \frac{\partial v}{\partial y} - e^u \cos v \, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Vi är klara.

---

5. [MODUL 5] Avbilda strimlan

$$0 < \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$$

konformt på halvplanet $\operatorname{Im} z > 0$.

Bildar vi $z_1 = e^{i\pi/4} z$ så avbildas strimlan på $0 < \operatorname{Im} z_1 < 1/\sqrt{2}$. Bildar vi sedan $z_2 = \pi\sqrt{2} z_1$ så får vi $0 < \operatorname{Im} z_1 < \pi$. Slutligen blir $w = e^{z_2}$ en allmän punkt i halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$. Den sökta avbildningen blir alltså

$$w = e^{(1+i)\pi z}.$$