Tentamensskrivning, 2008-05-26, kl. 08.00–13.00.

SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner, för E.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg krävs minst 4 av 5 moduler godkända (Del 1). För överbetyg krävs dessutom deltagande i Del 2. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 1

1. [MODUL 1] Undersök om vektorfältet

$$\mathbf{F} = (x^2 - y^2, axz, bxz)$$

har en vektorpotential, beroende på värdena på konstanterna a, b. Bestäm i så fall en sådan. Kom ihåg: en vektorpotential $\mathbf{A}$ till $\mathbf{F}$ löser $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{F}$.

2. [MODUL 2] Ett (krok)linjigt koordinatsystem (u, v, w) definieras genom

$$(u, v, w) = (x + az, y + bx, z + cx + dy),$$

där (x, y, z) betecknar ortsvektorn i vanliga koordinater. Bestäm vad konstanterna a, b, c, d ska vara för att koordinatbytet ska vara ortogonalt. Beräkna därefter (i detta fall) divergensen av vektorfältet

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_u + \mathbf{e}_v + \mathbf{e}_w,$$

där $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{e}_w$ betecknar motsvarande kroklinjiga enhetsvektorer.

3. [MODUL 3] Hitta en lösning till

$$\nabla^2 u = (x^2 + y^2 + z^2)^3, \quad \text{på} \quad B_3,$$

där B_3 är enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, med randvärde konstant lika med 8 på enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4. [MODUL 4] Låt $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, där $z = x + iy$, vara en analytisk funktion. Skriv den sammansatta funktionen $F(z) = e^{f(z)}$ i termer av real- och imaginärdel, samt visa (med hjälp av CR ekvationerna för $f = u + iv$) att funktionen $F(z)$ blir analytisk.

5. [MODUL 5] Avbilda strimlan

$$0 < \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$$

konformt på halvplanet $\operatorname{Im} z > 0$.