Tentamensskrivning, 2008-08-26, kl. 14.00–19.00.

SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner, för E.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För betyg A krävs 32 skrivningspoäng, för betyg B krävs 28 poäng, för betyg C krävs 22, för betyg D krävs 18 poäng, och för betyg E krävs 15 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING

1. Ett skalärfält ϕ ges i sfäriska koordinater av

$$\phi = r^3 \sin^2 \theta.$$

Beräkna

(a) $\operatorname{grad} \phi$,

(b) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi$,

(c) $\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi$. (5p)

2. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

där $\mathbf{F}$ är vektorfältet

$$\mathbf{F} = \big(y, z, x\big)$$

och ytan S ges av

$$S: \quad z = 5 - x^2 - y^2, \;\; x^2 + y^2 \leq 4.$$

Enhetsnormalen $\mathbf{n}$ är riktad så att den har positiv z-komponent. (5p)

3. Låt Γ vara skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $x + z = 1$. Kurvans projektion på xy-planet är positivt orienterad, och vektorfältet $\mathbf{F}$ är

$$\mathbf{F} = \big(y^2 z^2 e^{xz} + z^2, 2yz\, e^{xz} + zx, y^2(1 + xz)e^{xz} + 2xy\big).$$

(a) Visa att $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (x, 2z - 2y, z)$.

(b) Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (5p)

4. Bestäm konstanterna a, b, c så att

$$x = u^2 + av^2, \quad y = 2uv, \quad z = bu + cv + w$$

definierar ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem (u, v, w). Beräkna sedan de kroklinjiga komponenterna A_u, A_v, A_w av vektorfältet $\mathbf{A} = (x, 2y, 3z)$. (5p)

5. Ett gasmoln i rymden har, uttryckt i sfäriska koordinater (r, θ, φ) och för $r > 1$, tätheten

$$\rho(r) = \frac{6}{r^5}.$$

Gravitationsfältet som alstras av gasmolnet har en potential U som uppfyller Poissons ekvation

$$\Delta U = -\rho.$$

Bestäm alla sfäriskt symmetriska lösningar $U = U(r)$ till denna ekvation för $r > 1$. (5p)

V.g. vänd!

6. Bestäm konstanten a så att

$$u(x, y) = ax^3 - xy^2$$

blir realdelen till någon analytisk funktion $f(z)$. Om en sådan funktion $f(z)$ finns, ska den anges som funktion av z (och inte som en funktion av x och y). (5p)

7. Bestäm alla lösningar till ekvationen $\tan z = 2i$. (5p)

8. Finn en konform avbildning från övre halvplanet $y > 0$ (vi skriver $z = x + iy$) till halvbandet som beskrivs av villkoren

$$0 < y < 1 \quad \text{och} \quad -\infty < x < 0.$$

(5p)