KTH Teknikvetenskap

SF2703 ALGEBRA GRUNDKURS
ANTECKNINGAR
2008-01-21

1. Axiom och exempel

1.1. **Binära operationer.** En *binär operation* på en mängd, S, är en regel som till ett par av element i S tillordnar ett tredje element i S. Man kan se det som en funktion

$$S \times S \longrightarrow S$$

och brukar skriva $a * b = c$, där symbolen $*$ kan variera.

Många sådana operationer som vi stöter på har egenskapen att vi kan sätta samman flera element i rad till ett element, $a * b * c$. För att det ska fungera måste operationen uppfylla

$$(a * b) * c = a * (b * c),$$

för alla a, b och c i S. Detta kallas för att operationen är *associativ*. Exempel på sådana operationer är addition, multiplikation och sammansättning av funktioner.

Ett element som uppfyller $a * e = e * a = a$ för alla element i S kallas *neutralt*, *enhetselement* eller *identitetselement*.

Om vi har ett sådant element kan vi tala om att element är *inverterbara* om det finns ett annat element som ger identitetselementet, dvs om det för a finns ett element b så att

$$a * b = b * a = e.$$

Om operationen är associativ med ett identitetselement och varje element är inverterbart säger vi att S är en *grupp*.

Om operationen dessutom är *kommutativ*, dvs $a * b = b * a$ för alla a poch b i S, säger vi att gruppen är *abelsk*.

2. Dihedrala gruppen, D_{2n} – symmetrierna av en n-hörning

Genom att betrakta symmetrierna av en regelbunden n-hörning i planet får vi en grupp D_{2n} som har $2n$ olika element, varav n är rotationer och n är speglingar.

Genom att välja standardbasen för planet kan vi skriva upp matriserna för dessa symmetrier som

$$r_j = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad s_j = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \end{pmatrix}$$

Vi kan använda additionssatserna för sinus och cosinus för att se att produkterna av dessa matriser ges av

$$\begin{aligned} r_j r_k &= r_{j+k}, \quad & r_j s_k &= s_{k-j}, \\ s_j r_k &= s_{j+k}, \quad & s_j s_k &= r_{k-j}, \end{aligned}$$

Genom att gå över till komplexa tal och byta bas i $\mathbb{C}^2$ får vi matriser

$$r_j = \begin{pmatrix} \xi^j & 0 \\ 0 & \xi^{-j} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad s_j = \begin{pmatrix} 0 & \xi^{-j} \\ \xi^j & 0 \end{pmatrix}$$

där

$$\xi = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$