KTH Teknikvetenskap

SF2703 ALGEBRA GRUNDKURS ANTECKNINGAR 2008-01-23

1. Delgrupper

Definition 1.1. En icke-tom delmängd $H \subseteq G$ av en grupp bildar en *delgrupp* om den är sluten under gruppoperationen och inversen.

Sats 1.1. *En ändlig delmängd av en grupp är en delgrupp om den är sluten under gruppoperationen.*

Bevis. Eftersom delmängden är ändlig och sluten under gruppoperationen måste varje element ha ändlig ordning, och därmed är också inversen med, eftersom

$$a^n = e \Longleftrightarrow a^{-1} = a^{n-1}.$$

□

Sats 1.2. *En icke-tom delmängd $H \subseteq G$ av en grupp är en delgrupp om gh^{-1} ligger i H för alla g och h i H.*

Bevis. Eftersom $e = gg^{-1}$ får vi att $e \in H$ om H är icke-tom. Därmed får vi att $eg^{-1} = g^{-1}$ ligger i H för alla g i H och sedan kan vi skriva $gh = g(h^{-1})^{-1}$, vilket ligger i H om g och h ligger i H. Alltså är H sluten under produkt och invers, vilket betyder att det är en delgrupp. □

Sats 1.3. *Skärningen av en uppsättning delgrupper är också en delgrupp, dvs*

$$H = \bigcap_{i \in I} H_i$$

är en delgrupp om H_i är en delgrupp för alla i i indexmängden I.

Bevis. Skärningen H är icke-tom eftersom e ligger i alla delgrupper H_i. Om g och h ligger i alla H_i ligger också gh^{-1} i alla H_i eftersom dessa är delgrupper. Därmed är också H en delgrupp. □

Exempel 1.1. Den alternerande gruppen, $A_n \subseteq S_n$, som består av jämna permutationer är en delgrupp eftersom $\sigma \circ \tau^{-1}$ är en jämn permutation om både σ och τ är jämna permutationer.

Exempel 1.2. Kärnan till en homomorfi $\Phi : G \longrightarrow H$ är en delgrupp eftersom

$$\Phi(gh^{-1}) = \Phi(g)\Phi(h)^{-1} = ee^{-1} = e$$

om $\Phi(g) = \Phi(h) = e$. Det är klart att kärnan är icke-tom eftersom $\Phi(e) = e$.

Exempel 1.3. Den ortogonala gruppen $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ som består av alla ortogonala matriser är en delgrupp i $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ eftersom

$$(AB^{-1})(AB^{-1})^T = (AB^T)(AB^T)^T = AB^TBA^T = AIA^T = AA^T = I$$

om $AA^T = I$ och $BB^T = I$, vilket betyder att AB^{-1} är ortogonal om A och B är det.

Den speciella linjära gruppen $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ som består av alla matriser som har determinant 1 är en delgrupp i $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ eftersom

$$\det(AB^{-1}) = \det(A)/\det(B) = 1$$

om $\det(A) = \det(B) = 1$.

Exempel 1.4. För varje element g i en grupp G kan vi bilda

$$\langle g\rangle = \{g^i | i \in \mathbb{Z}\}.$$

Detta är en delgrupp i G eftersom inversen till g^i är g^{-i} och produkten av g^i och g^j är g^{i+j}. Detta kallas för den *cykliska delgrupp som genereras av* g.

Definition 1.2. ordning Ordningen av ett element g är lika med ordningen av den cykliska delgrupp som genereras av g, dvs kardinaliteten av $\langle g\rangle$. Vi skriver $|g| = |\langle g\rangle|$, eller i vissa fall $o(g) = \langle g\rangle$.

2. Centralisatorer och normalisatorer

Definition 2.1. Om vi har en delmängd $A \subseteq G$ av en grupp kallas mängden

$$C_G(A) = \{g \in G | gag^{-1} = a, \quad \forall a \in D\}$$

för *centralisatorn* till A i G.

Observera att detta är detsamma som alla element i G som kommuterar med alla element i A, dvs som uppfyller $ga = ag$, för alla a i A.

Sats 2.1. *Centralisatorn, $C_G(A)$, är en delgrupp i G.*

Bevis. För g och h i $C_G(A)$ och a i A har vi att $ga = ag$ och $ha = ah$. Därmed får vi att

$$g^{-1}gag^{-1} = g^{-1}agg^{-1}$$

vilket är ekvivalent med $ag^{-1} = g^{-1}a$, och g^{-1} ligger i $C_G(A)$. Vi har också att

$$(gh)a = g(ha) = g(ah) = (ga)h = (ag)h = a(gh)$$

vilket visar att gh ligger i $C_G(A)$. □

En liknande konstruktion ger normalisatorn till en mängd. Observera att vi med gAg^{-1} menar mängden av alla element på formen gag^{-1} där a ligger i A. På samma sätt kan vi tala om mängderna gA och Ag.

Definition 2.2. För en delmängd A i en grupp G är *normalisatorn*

$$N_G(A) = \{g \in G | gAg^{-1} = A, \quad \forall a \in A\}.$$

Vi kan även här formulera kravet som $gA = Ag$.

Sats 2.2. *Normalisatorn $N_G(A)$ är en delgrupp i G.*

Bevis. För g och h i $N_G(A)$ får vi att

$$(gh)A(gh)^{-1} = ghAh^{-1}g^{-1} = gAg^{-1} = A$$

vilket visar att $N_G(A)$ är sluten under sammansättning. Vi får också att

$$g^{-1}A(g^{-1})^{-1} = g^{-1}(gAg^{-1})g = (g^{-1}g)A(g^{-1}g) = A.$$

För att visa att $N_G(A)$ är icke-tom kan vi konstatera att $eA = Ae$. □

Definition 2.3. Mängden av alla element i en grupp G som kommuterar med alla element i gruppen kallas *centret*, $Z(G)$.

Vi kan se på centret som skärningen mellan alla centralisatorer

$$Z(G) = \bigcap_{a \in G} C_G(a)$$

och det är därmed klart att även centret är en delgrupp i G enligt Sats 1.3.

3. Stabilisator och kärna till en gruppverkan

Definition 3.1. Om G verkar på X är *kärnan* till denna gruppverkan

$$\{g \in G | g.x = x \quad \forall x \in X\}.$$

Detta är detsamma som kärnan till den homomorfi $G \longrightarrow S_X$ som defineras av gruppverkan.

Definition 3.2. Om G verkar på X är *stabilisatorn* till ett element x i X alla element som fixerar x, dvs

$$G_x = \{g \in G | g.x = x\}$$

Sats 3.1. *Kärnan och stabilisatorn till en gruppverkan är delgrupper i gruppen.*

Bevis. Eftersom vi redan vet att kärnan till en grupphomomorfi från G är en delgrupp i G, är det klart att kärnan till en gruppverkan också är en delgrupp.

Per definition av gruppverkan är $e.x = x$, vilket visar att G_x är icke-tom. Om nu g och h ligger i G_x får vi att

$$(gh^{-1}).x = (gh^{-1}).(h.x) = (gh^{-1}h).x = g.x = x$$

vilket visar att också gh^{-1} ligger i G_x. Allstå är G_x en delgrupp. □

Vi kan också se kärnan till gruppverkan som skärningen av alla stabilisatorer, $\bigcap_{x \in X} G_x$.

4. Lagranges sats

Om vi har en ändlig grupp visar det sig att delgrupper inte kan ha vilka ordningar som helst. Lagranges sats säger oss att delgruppernas ordningar måste dela gruppens ordning.

Sats 4.1. (Lagranges sats) *Om H är en delgrupp i en ändlig grupp G så är $|H|$ en delare i $|G|$.*

Bevis. Vi kan låta G verka på sig själv genom multiplikation till vänster. Vi får då en uppsättning mängder gH av sidoklasser till H. Två ekvivalensklasser gH och $g'H$ är lika om $g^{-1}g'$ ligger i H eftersom vi kan skriva om varje element $g'h$ i $g'H$ som

$$g'g'^{-1}gg^{-1}g'h = g(g^{-1}g'h)$$

som ligger i gH. Om det finns något gemensamt element mellan gH och $g'H$ har vi att

$$gh = g'h' \iff g^{-1}gh = g^{-1}g'h' \iff g^{-1}g' = hh'^{-1}.$$

Alltså ger sidoklasserna en *partition* av G, dvs en uppdelning av hela G i disjunkta delmängder. Eftersom varje element g i G ger en bijektion från H till gH genom multiplikationen måste alla sidoklasser ha samma antal element. Därmed måste antalet element i G vara en multipel av antalet element i H. □

Speciellt får vi att ordningen för varje element i en grupp måste dela gruppens ordning, och därmed får vi att

$$g^{|G|} = e$$

för alla element i en ändlig grupp G.

Övning 4.1. Bestäm alla element i $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ som har ändlig ordning. (*Ledning*: Vi pratade på lektionen om att vi kunde se att determinanten är ± 1 och att egenvärdena måste vara enhetsrötter.)

Exempel 4.1. Gruppen $G = \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ verkar på $\mathbb{R}^2$ som kolonnvektorer. Stabilisatorn av vektorn $x = (1,0)^T$ ges av alla matriser i $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ som uppfyller

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger $a = 1$ och $c = 0$, men b och d kan vara vad som helst, så när som att $d \neq 0$ för att matrisen skall vara inverterbar. Alltså har vi

$$G_x = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, b, d \in \mathbb{R}, \quad d \neq 0 \right\}$$

(Obs! När vi talade om detta på lektionen glömde vi att d inte kan vara noll.)