



KTH Teknikvetenskap

## SF2703 ALGEBRA GRUNDKURS ANTECKNINGAR 2008-01-28

### 1. DELGRUPPER SOM GENERERAS AV EN DELMÄNGD

**Definition 1.1.** En icke-tom delmängd  $A \subseteq G$  av en grupp *genererar* en delgrupp  $\langle A \rangle$  som är den minsta delgrupp som innehåller  $A$ , dvs

$$\langle A \rangle = \bigcap_{\substack{H \subseteq A \\ H \leq G}} H$$

**Sats 1.1.**  $\langle A \rangle = \{a_1 a_2 \cdots a_n \mid a_i \in A \cup A^{-1}, n \in \mathbb{N}\}$ .

*Bevis.* Det är klart att alla element som ligger i mängden till höger måste vara med i varje delgrupp  $H$  som innehåller  $A$  eftersom en delgrupp är sluten under invers och produkt.

Det återstår att visa att högerledet,  $\bar{A}$ , är en delgrupp. För att göra det tar vi två element  $g = a_1 a_2 \cdots a_m$  och  $h = b_1 b_2 \cdots b_n$  där alla  $a_i$  och  $b_i$  ligger i  $A \cup A^{-1}$ . Det betyder att också alla  $b_i^{-1}$  ligger i  $A \cup A^{-1}$  och vi ser därför att

$$gh^{-1} = a_1 a_2 \cdots a_m b_n^{-1} b_{n-1}^{-1} \cdots b_1^{-1}$$

också ligger i  $\bar{A}$ . Alltså är  $\bar{A}$  en delgrupp och eftersom den är innehållen i alla delgrupper som innehåller  $A$  måste den vara den minsta delgrupp som innehåller  $A$ , dvs  $\bar{A} = \langle A \rangle$ .  $\square$

### 2. DELGRUPPSLATTICE

Om vi har två delgrupper  $H_1 \leq G$  och  $H_2 \leq G$  finns det två andra delgrupper som ges av  $H_1$  och  $H_2$ . Det är dels skärningen  $H_1 \cap H_2$ , dels den delgrupp som genereras av unionen  $H_1 \cup H_2$ . Vi skriver

$$\langle H_1, H_2 \rangle = \langle H_1 \cup H_2 \rangle.$$

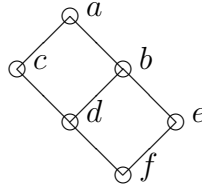
Medan snittet är den största delgrupp som ligger i både  $H_1$  och  $H_2$  är förenningen  $\langle H_1, H_2 \rangle$  den minsta delgrupp som innehåller både  $H_1$  och  $H_2$ .

Relationen  $\leq$  som talar om att en delgrupp är en delgrupp i en annan delgrupp är en *partialordning*, dvs uppfyller

- $a \leq a$  (*reflexivitet*)
- $a \leq b$  och  $b \leq c \implies a \leq c$  (*transitivitet*)
- $a \leq b$  och  $b \leq a \implies a = b$  (*antisymmetri*)

Vi säger att mängden av delgrupper av en grupp  $G$  är en *partialordnad mängd* under  $\leq$ . En partialordnad mängd där det för varje par  $a, b$  finns ett minsta element som är större än både  $a$  och  $b$  och ett största element som är mindre än  $a$  och  $b$  kallas för ett *lattice* eller *gitter*.

Grafiskt kan vi åskådliggöra ett ändligt lattice genom att rita en hörn för varje element och en kant för varje minimal relation  $a \leq b$ , där det större elementet ligger högre upp än det mindre.



**Exempel 2.1.** Om  $G = S_3$  har vi fem delgrupper

$$\{\text{id}\}, \langle(12)\rangle, \langle(13)\rangle, \langle(23)\rangle, \langle(123)\rangle \text{ och } S_3.$$

Ingen av de fyra delgrupperna i mitten innehåller varandra, men alla innehåller den triviala delgruppen  $\{\text{id}\}$  och alla ligger i  $S_3$ . Alltså kan vi rita upp delgruppslattice som

