KTH Teknikvetenskap

SF2703 ALGEBRA GRUNDKURS
ANTECKNINGAR
2008-01-29

1. Kvotgrupper och homomorfier

Om vi har en delgrupp H av en grupp G skulle det vara naturligt att bilda en kvot G/H på samma sätt som vi gjort när det gäller att räkna med heltal modulo n. Vi skulle då räkna med någon form av restklasser modulo H, och de naturliga kandidaterna till restklasser är sidoklasserna, gH, för $g \in G$.

Definition 1.1. Om H är en delgrupp i en grupp G låter vi G/H beteckna mängden av vänstersidoklasser

$$G/H = \{gH | g \in G\}$$

Vi har redan sett att sidoklasserna är disjunkta eller identiska och två element g och g' ligger i samma sidoklass precis om $g^{-1}g'$ ligger i H.

För att G/H ska kunna få en struktur av en grupp måste vi ha en gruppoperation och det naturliga skulle vara att ta två representanter i sidoklasserna som ska multipliceras och använda produkten av dessa element som definition av produkten av sidoklasserna, dvs

$$g_1Hg_2H = g_1g_2H.$$

För att detta ska kunna fungera måste resultatet vara oberoende av vilka representanter vi väljer. Det visar sig att detta är sant om vänstersidoklasserna är lika med högersidoklasserna, dvs $gH = Hg$, för alla $g \in G$, eftersom vi då får att

$$g_1Hg_2H = g_1(Hg_2)H = g_1(g_2H)H = g_1g_2H \cdot H = g_1g_2H.$$

Definition 1.2. Om $gH = Hg$ för alla g i G säger vi att H är en *normal* delgrupp i G.

Vi kan se att detta är det samma som att normalisatorn till H är hela G, eftersom $gH = Hg$ är samma sak som $gHg^{-1} = H$.

Sats 1.1. *I en abelsk grupp är alla delgrupper normala.*

Bevis. Eftersom gruppoperationen, $+$, i en abelsk grupp är kommutativ är det klart att $g + H = H + g$. □

Sats 1.2. *Om H är en normal delgrupp i G bildar G/H en grupp under operationen $g_1H * g_2H = (g_1g_2)H$.*

Bevis. Vi har redan sett att operationen är väldefinierad när H är normal. Det återstår att visa att operationen uppfyller kraven för en gruppoperation. Operationen är associativ eftersom

$$(g_1H * g_2H) * g_3H = (g_1g_2)g_3H = g_1(g_2g_3)H = g_1H * (g_2H * g_2H)$$

eftersom operationen i G är associativ. Enheten i G/H är eH, eftersom

$$eH * gH = gH = gH * eH,$$

för alla g i G. Inversen till gH ges av $g^{-1}H$ eftersom

$$gH * g^{-1}H = (gg^{-1})H = eH = (g^{-1}g)Hg^{-1}H * gH.$$

□

Exempel 1.1. Vi kan beskriva alla ändliga cykliska grupper C_n som kvoten av $\mathbb{Z}$ med delgruppen $n\mathbb{Z}$, som är normal eftersom C_n är abelsk. Vi får

$$C_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

där vi ser på $\mathbb{Z}$ som en grupp under addition.

Sats 1.3. *Kärnan till en homomorfi är ne normal delgrupp.*

Bevis. Låt $\Phi : G \longrightarrow H$ vara en homomorfi mellan två grupper. För varje element g i G och varje element $h \in \ker \Phi$ har vi

$$\Phi(ghg^{-1}) = \Phi(g)\Phi(h)\Phi(g^{-1}) = \Phi(g)e\Phi(g^{-1}) = \Phi(gg^{-1}) = \Phi(e) = e.$$

Alltså tillhör ghg^{-1} kärnan som därmed är normal. □

Exempel 1.2. Etersom $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$ är kärnan i homomorfin $\det : \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ är $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$ en normal delgrupp och vi kan bilda kvoten $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})/\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$. Denna delgrupp är isomorf med $\mathbb{R}^*$ under multiplikation.

Exempel 1.3. Den alternerande gruppen A_n är kärnan till homomorfin $\mathrm{sgn} : S_n \longrightarrow \mathbb{Z}^*$. Kvoten S_n/A_n är isomorf med $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$.

2. Mer om sidoklasser

Vi har redan sett på Lagranges sats tidigare. Om vi ser på fallet när en delgrupp är stabilsatorn för ett element under gruppverkan kan vi få ytterligare en tolkning av antalet sidoklasser.

Sats 2.1. *Om gruppen G verkar på en mängd X har vi att antalet sidoklasser till stabilsatorn G_x ges av antalet element i banan Gx. Alltså gäller att*

$$|G_x| \cdot |Gx| = |G|,$$

för alla element x i X.

Bevis. Vi skulle vilja se på antalet sidoklasser till $H = G_x$. Vi vet att två element, g och g', ligger i samma sidoklass om och endast om $g^{-1}g'$ ligger i H, men det betyder att

$$g^{-1}g'.x = x \iff g'.x = g.x.$$

Alltså får vi en bijektion mellan sidoklasserna i till $H = G_x$ och elementen i banan

$$Gx = \{g.x | g \in G\},$$

vilket bevisar satsen. $\square$

Exempel 2.1. Om vi ska räkna antalet element i $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_q)$ – den generella linjära gruppen över en kropp med q element – får vi att

$$|\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)|\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_q)_v|$$

för varje nollskild vektor $v \in \mathbb{F}_q^n$ eftersom banan för v är $\mathbb{F}_q^n \setminus \{0\}$. Å andra sidan får vi att stabilisatorn för $v = (1, 0, \ldots, 0)^T$ ges av alla matriser i $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_q)$ vars första kolonn är v. Antalet element är således $q^{n-1}|\mathrm{Gl}_{n-1}(\mathbb{F}_q)|$ och med induktion får vi

$$|\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q - 1)q^{n(n-1)/2}.$$

Exempel 2.2. Genom att se på hur symmetrigrupperna för de platonska kropparna verkar på mängden av sidor får vi antalet element för dodekaedern som

$$5 \cdot 12 = 60$$

eftersom varje sida fixeras av fem rotationer och varje sida kan skickas till var och en av de tolv sidorna. På samma sätt får vi $3 \cdot 4 = 12$ symmetrier av tetraedern, $6 \cdot 6 = 24$ symmetrier av kuben, $3 \cdot 8 = 24$ symmetrier av oktaedern och $3 \cdot 20 = 60$ symmetrier av ikosaedern.

Definition 2.1. Vi säger att en grupp G verkar *transitivt* på en mängd X om det för varje element i X kan gå på varje annat element i X.

Sats 2.2. *Om H och K är delgrupper i G gäller att*

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}.$$

Bevis. Mängden HK kan ses som en union av sidoklasser till K. Det gäller nu bara att räkna hur många sidoklasser det är. Vi ser att H verkar transitivt på mängden av sidoklasser som ligger i HK genom multiplikation till vänster. Antalet sidoklasser kan nu fås genom $|H|/|H_x|$ där H_x är stabilisatorn för någon sidoklass. Vi kan lika gärna titta på stabilisatorn till sidoklassen $eK = K$. Ett element h i H fixerar K om och endast om $hK = K$, dvs om och endast om h ligger i K. Alltså ges stabilisatorn av $H \cap K$, och vi har att HK består av $|H|/|H \cap K|$ sidoklasser till $|K|$, vilket bevisar satsen. $\square$

Exempel 2.3. (Uppgift 3.1.22)

a) Visa att $H \cap K$ är en normal delgrupp om H och K är normala.
b) Visa skärningen av en uppsättning normala delgrupper $\{H_i\}_i \in I$ är normal.

Det räcker att se på b) eftersom a) är ett specialfall. Tag ett element h som ligger i skärningen $H = \bigcap_{i \in I} H_i$. Det betyder att h ligger i H_i för alla $i \in I$. Eftersom dessa delgrupper är normala gäller att

$$ghg^{-1} \in H_i$$

för alla g i G och alla i i I. Alltså ligger ghg^{-1} i H som därmed är normal.