KTH Teknikvetenskap

SF2703 ALGEBRA GRUNDKURS ANTECKNINGAR 2008-01-31

1. Isomorfisatserna

Sats 1.1. (Första isomorfisatsen) *För en grupphomomorfi $\Phi : G \longrightarrow H$ gäller att*

$$G/\ker\Phi \overset{\sim}{=} \mathrm{im}\Phi.$$

Bevis. Till att börja med kan vi anta att $H = \mathrm{im}\Phi$ genom att se på sammansättningen

$$G \longrightarrow \mathrm{im}\Phi \longrightarrow H.$$

Vi har projektionen

$$G \longrightarrow G/\ker\Phi$$

och vi kan få en faktorisering av homomorfin $G \longrightarrow \mathrm{im}\Phi$ genom $G/\ker\Phi$ om vi kan få en inducerad homomorfi $\Psi : G/\ker\Phi \longrightarrow \mathrm{im}\Phi$. För att det ska stämma måste vi för ett element $g\ker\Phi$ i $G/\ker\Phi$ ta bilden av g i $\mathrm{im}\Phi$, dvs låta

$$\Psi(g\ker\Phi) = \Phi(g) \in \mathrm{im}\Phi.$$

Detta definierar en funktion från $G/\ker\Phi$ eftersom olika representanter för samma sidoklass uppfyller $g_1^{-1}g_2 \in \ker\Phi$, vilket är detsamma som att $\Phi(g_1) = \Phi(g_2)$. Vi ser att

$$\Psi(g_1\ker\Phi * g_2\ker\Phi) = \Psi(g_1g_2\ker\Phi) = \Phi(g_1g_2) = \Phi(g_1)\Phi(g_2) = \Psi(g_1\ker\Phi)\Psi(g_2\ker\Phi)$$

vilket visar att Ψ är en homomorfi.

För att visa att Ψ är en isomorfi räcker det att visa att den är surjektiv och injektiv. Att den är surjektiv är klart eftersom varje element i $\mathrm{im}\Phi$ är lika med $\Phi(g) = \Psi(g\ker\Phi)$ för något element g i G.

För att se att den är injektiv ser vi på kärnan som ges av

$$\ker\Psi = \{g\ker\Phi | \Phi(g) = e\} = \{e\ker\Phi\}$$

och eftersom kärnan bara består av enhetselementet är homomorfin injektiv. □

Definition 1.1. För en homomorfi $\Phi : G \longrightarrow H$ och ett element h i H säger vi att

$$\{g \in G | \Phi(g) = h\}$$

är *fibern* av Φ över h.

Sats 1.2. *Fibrerna till en homomorfi är samma sak som sidoklasserna till kärnan.*

Bevis. Om $\Phi(g_0) = h$ har vi att

$$\{g \in G | \Phi(g) = h\} = \{g_0 g | g \in \ker \Phi\} = g_0 \ker \Phi$$

eftersom

$$\Phi(g) = \Phi(g_0) \Longleftrightarrow \Phi(g_0^{-1} g) = e \Longleftrightarrow g_0^{-1} g \in \ker \Phi \Longleftrightarrow g \in g_0 \ker \Phi.$$

□

Genom detta ser vi på ytterligare ett sätt att det finns en bijektion mellen kvoten $G/\ker\Phi$ och bilden $\mathrm{im}\Phi$.

Exempel 1.1. Eftersom $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$ är kärnan till den surjektiva homomorfin

$$\det : \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$$

är det nu klart att kvoten $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})/\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$ är isomorf med bilden $\mathbb{R}^*$. På samma sätt får vi att den alternerande gruppen A_n är kärnan till den surjektiva homomorfin

$$\mathrm{sgn} : S_n \longrightarrow \mathbb{Z}^*$$

och därmed är kvoten S_n/A_n isomorf med bilden $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$.

Sats 1.3. **(Andra isomorfisatsen)** *Om K och H är delgrupper i G och H ligger i normalisatorn $N_G(K)$ så är HK en delgrupp i G, K är normal i HK och $H \cap K$ är normal i H. Dessutom gäller att*

$$\frac{HK}{K} \cong \frac{H}{H \cap K}.$$

Bevis. Vi börjar med att se att HK är en delgrupp. Om h_1, h_2 ligger i H och k_1, k_2 i K får vi

$$h_1 k_1 (h_2 k_2)^{-1} = h_1 k_1 k_2^{-1} h_2^{-1} = h_1 h_2^{-1} k_1' k_2'$$

för något k_1' och något k_2' i K, eftersom $H \subseteq N_G(K)$. Alltså är HK en delgrupp.

Att K är normal i HK följer av att

$$hkk'(hk)^{-1} = hkk'k^{-1}h^{-1} = hh^{-1}k'' = k''$$

för något k'' i K eftersom $H \subseteq N_G(K)$.

Om k ligger i $H \cap K$ och h ligger i H får vi att hkh^{-1} ligger i både H och K, och därmed i $H \cap K$, eftersom $H \subseteq N_G(K)$. Alltså är $H \cap K$ normal i H.

För att sedan bevisa isomorfin definierar vi en homomorfi från HK till $H/H \cap K$ genom

$$\Phi(hk) = hH \cap K,$$

för h i H och k i K. Denna är väldefinierad eftersom $h_1 k_1 = h_2 k_2$ innebär att $h_1^{-1} h_2 = k_1 k_2^{-1}$ som ligger i $H \cap K$. Att det är en homomorfi framgår av att

$$\Phi(h_1 k_1 h_2 k_2) = \Phi(h_1 h_2 k_1' k_2) = h_1 h_2 H \cap K = (h_1 H \cap K) * (h_2 H \cap K),$$

för alla h_1, h_2 i H och alla k_1, k_2 i K.

Eftersom Φ är surjektiv räcker det nu enligt den första isomorfisatsen att visa att $\ker \Phi = K$, men

$$\ker \Phi = \{hk \in HK | h \in H \cap K\} = K,$$

vilket bevisar satsen. □

Sats 1.4. (Tredje isomorfisatsen) *Om $H \subseteq K$ är normala delgrupper i G så gäller att*

$$\frac{G/H}{K/H} \cong G/K.$$

Bevis. Vi kan skapa en homomorfi

$$\Phi : G/H \longrightarrow G/K$$

genom

$$\Phi(gH) = gK$$

för alla g i G. Den är väldefinierad eftersom $g_1H = g_2H$ innebär att $g_1^{-1}g_2$ ligger i H, men eftersom $H \subseteq K$ är därmed $g_1K = g_2K$. För g_1 och g_2 i G gäller att

$$\Phi(g_1H * g_2H) = \Phi(g_1g_2H) = (g_1g_2)K = g_1K * g_2K$$

vilket visar att Φ är en homomorfi. Eftersom Φ är surjektiv, räcker det nu enligt den första isomorfisatsen att visa att $\ker\Phi = K/H$. Eftersom enheten i G/K är sidoklassen eK ges kärnan av

$$\ker\Phi = \{gH|gK = eK\} = \{gH|g \in K\} = K/H,$$

vilket bevisar satsen. □

2. Transpositioner och den alternerande gruppen

I den symmetriska gruppen S_n kallas tvåcyklerna för *transpositioner*. Detta är alltså permutationer som byter plats på precis två element.

Definition 2.1. Vi säger att *längden*, $\ell(\sigma)$, av en permutation σ i S_n är antalet *inversioner*, dvs

$$\ell(\sigma) = |\{(i,j)|i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}|.$$

Sats 2.1. *Den symmetriska gruppen genereras av transpositionerna*

$$\{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\} = \{(1\,2), (2\,3), \ldots, (n-1\,n)\}.$$

Bevis. Vi kan bevisa detta genom induktion över längden, $\ell(\sigma)$. Den enda permutationen av längd 0 är identitetspermutationen som är en produkt av noll transpositioner.

Om vi har en permutation som har minst en inversion så finns minst ett i så att $\sigma(i+1) < \sigma(i)$, eftersom σ annars skulle vara strikt växande. Om vi sätter samman σ med transpositionen $s_i = (i\,i+1)$ minskar antaletinversioner med ett och vi kan per induktion anta att $\tau = \sigma \circ s_i$ kan skrivas som en produkt av transpositionerna $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$. Därmed kan vi nu också skriva $\sigma = \tau \circ s_i$ som en produkt av dessa transpositioner. □

Sats 2.2. *För varje permutation σ i S_n gäller att*

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}.$$

Bevis. Vi har tidigare definierat sgn genom att S_n verkar på Van der Monde-determinanten $\prod_{i<j}(x_j - x_i)$. Vi kan nu konstatera att varje transposition s_i byter tecken på $\prod_{i<j}(x_j - x_i)$, vilket betyder att $\operatorname{sgn}(s_i) = -1$. Om vi utför $\ell(\sigma)$ successiva transpositioner byter uttrycket tecken $\ell(\sigma)$ gånger och vi får att $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$. □