KTH Teknikvetenskap

SF2703 ALGEBRA GRUNDKURS
ANTECKNINGAR
2008-02-05

1. Permutationsrepresentationer av grupper

Vi har redan tidigare sett att en verkan av en grupp G på en mängd X svarar mot en homomorfi

$$G \longrightarrow S_X$$

in i symmetriska gruppen på X, dvs gruppen av inverterbara funktioner från X till X.

Definition 1.1. En *permutationsrepresentation* av en grupp G är en icke-tom mängd X och en homomorfi $G \longrightarrow S_X$.

Permutationsrepresentationen säger mest om gruppen ifall den är *trogen*, dvs om homomorfin är injektiv. Då är G isomorf med bilden av G i S_X och vi kan tänka oss G som en delgrupp i S_X.

2. Grupper som verkar på sig själva med multiplikation till vänster

Varje grupp verkar naturligt på sig själv genom multiplikation till vänster, dvs med $g.h = gh$, för alla g, h i G. Denna verkan är trogen eftersom endast identitetselementet har trivial multiplikation. Alltså har vi en injektiv homomorfi

$$G \longrightarrow S_G.$$

Om G är ändlig får vi att G är isomorf med en delgrupp av S_n, där $n = |G|$. Detta faktum kallas *Cayleys sats*. Detta ger dock i allmänhet en väldigt stor grupp S_n och det kan finnas betydligt mindre permutationsrepresentationer som ändå är trogna.

Exempel 2.1. Vi kan se dihedrala gruppen som en delgrupp av S_{2n} genom att se hur den permuterar elementen, men vi kan också se D_{2n} som en delgrupp av S_n genom att numrera hörnen eller kanterna i den n-hörning den verkar på.

Vi har sett att symmetrigrupperna av de platonska kropparna är isomorfa med A_4, S_4 och A_5. Symmetrigruppen av ikosaedern och dodekaedern skulle med Cayleys sats ses som en delgrupp i S_{60} istället för en delgrupp av S_5.

När G verkar på mängden av sidoklasser till en delgrupp $H \subseteq G$ får vi en homomorfi

$$G \longrightarrow S_{G/H}$$

och kärnan till denna homomorfi är en normal delgrupp som ligger i H. I själva verket är det den största normala delgrupp som ligger i H i den mening att den innehåller alla normala delgrupper som ligger i H.

Sats 2.1. *Om H är en delgrupp i G och K är kärnan till verkan av G på sidoklasserna till H, så innehåller K alla normala delgrupper i G som ligger i H.*

Bevis. Låt L vara en normal delgrupp som ligger i H. För ℓ i L och g i G har vi att

$$\ell.(gH) = \ell gH = g\ell' H = gH$$

för något element ℓ' i L, eftersom L är normal. Alltså verkar alla element i L trivialt på sidoklasserna till H och L är en delgrupp i kärnan. □

2.1. **Ett bevis för Cauchys sats.** I en av uppgifterna i föregående kapitel finns ett recept för att kunna bevisa Cauchys sats genom att se på hur en cyklisk grupp av ordning p verkar på en mängd. Vi ska följa detta recept nedan.

Sats 2.2. **(Cauchys sats)** *Om p är ett primtal som delar ordningen av G så finns ett element av ordning p i G.*

Bevis. Låt p vara ett primtal som delar $|G|$. Vi låter X vara mängden av element i $G^p = G \times G \times \cdots \times G$ som uppfyller $g_1 g_2 \cdots g_p = 1$. Antalet element i X är $|G|^{p-1}$ eftersom vi kan välja de $p-1$ första elementen godtyckligt och sedan få det sista givet av ekvationen.

Den cykliska gruppen Z_p verkar på X genom att

$$(g_1 g_2 \cdots g_i)(g_{i+1} \cdots g_p) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (g_{i+1} g_{i+2} \cdots g_p)(g_1 g_2 \cdots g_i) = 1$$

för alla $i = 1, 2, \ldots, p-1$.

Stabilisatorn för ett element en delgrupp i Z_p, vilket innebär att den antingen är trivial eller hela Z_p, eftersom p är ett primtal. Om den är hela Z_p måste elementet vara på formen $(g, g, \ldots, g)$, med $g^p = 1$. Banorna har därmed storlek 1 eller p. Om det bara fanns en bana $\{(1, 1, \ldots, 1)\}$ av storlek ett skulle antalet element i X vara kongruent med 1 modulo p, men p delar $|G|^{p-1}$, vilket visar att det måste finnas mer än en bana av storlek 1 och därmed ett element $g \neq 1$ som uppfyller $g^p = 1$. Eftersom p är ett primtal måste ordningen av g vara p, och satsen är bevisad. □

2.2. **Ledningar till några av uppgifterna.**

4.1.1 Visa att $G_b = gG_a^{-1}$ genom att se att $G_b \subseteq gG_a g^{-1}$ och $G_b \supseteq gG_a g^{-1}$.

4.1.2 Visa att $\sigma G_a \sigma^{-1} = G_{\sigma(a)}$ genom att se att vänsterledet innehåller högerledet, och tvärtom. Visa att skärningen är trivial genom att använda likheten ovan.

4.1.3 Använd uppgift två som visar att $G_a = 1$ för alla $a \neq 1$ eftersom skärningen

$$\bigcap_{\sigma \in G} \sigma G_a \sigma^{-1} = G_a$$

när G är abelsk.