KTH Teknikvetenskap

SF2703 ALGEBRA GRUNDKURS
ANTECKNINGAR
2008-02-25

1. Egenskaper hos ideal

För en mängd A i en ring R kan vi bilda det minsta ideal (A) som innehåller A och vi kan bilda

$$RAR = \{r_1 a_1 s_1 + \cdots + r_m a_m s_m | r_i, s_i \in R, a_i \in A\}$$

som är ett ideal som innehåller A. Precis som för delgrupper får vi att $(A) = RAR$. Vi kan göra liknande för vänster- och högerideal.

Ett ideal som kan skrivas $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ kallas *ändligt genererat* och om det bara kräver en generator är det ett *principalideal*.

Definition 1.1. Ett ideal $\mathfrak{m} \in R$ är ett maximalideal om det inte är inneållet i något annat äkta ideal.

Med hjälp av Zorns lemma kan man visa att varje ideal är innehållet i ett maximalideal om det finns en etta i ringen. Då är ett ideal äkta om och endast om det inte innehåller ettan.

Zorns lemma säger att en partiellt ordnad mängd där varje totalordnad delmängd har en övre gräns har ett maximalt element. Vi använder Zorns lemma på mängden av äkta ideal som innehåller det givna idealet och visar att varje kedja av ideal i denna mängd har en övre gräns som ges av unionen av idealen.

Definition 1.2. Ett äkta ideal P i en kommutativ ring R är ett *primideal* om

$$ab \in P \iff a \in P \text{ eller } b \in P.$$

Sats 1.1. *I en kommutativ ring R är I ett primideal om och endast om R/P är ett integritetsområde.*

Bevis. Vi ser att $(a+I)(b+I) = I$ är detsamma som att $ab \in I$, och därmed är $(a+I)(b+I) = 0$ i R/I detsamma som att $ab \in I$. $\square$

Sats 1.2. *I en kommutativ ring R med etta är I ett maximalideal om och endast om R/I är en kropp.*

Bevis. Om $a \in R$ inte är inverterbar modulo I så kan vi bilda $(a) + I$ som är ett äkta ideal som innehåller I. Om I är maximalt måste varje $a \notin I$ vara inverterbart modulo I eftersom $(a) + I$ inte kan vara äkta. $\square$

2. Fraktionsringar

Om R är en kommutativ ring och D är en icke-tom delmängd av icke-nolldelarna i R som inte innehåller 0 och är sluten under multiplikation kan vi bilda en fraktionsring $D^{-1}R$ som har följande egenskaper:

- $D^{-1}R$ är en kommutativ ring med etta.
- Det finns en injektiv homomorfi $R \longrightarrow D^{-1}R$ och varje element i D avbildas på ett inverterbart element i $D^{-1}R$.
- $D^{-1}R$ är minimal i den meningen att det för varje annan ring S med ovanstående två egeneskaper finns en injektiv homomorfi $D^{-1}R \longrightarrow S$ genom vilken $R \longrightarrow S$ faktoriserar.

Vi kan konstruera $D^{-1}R$ som mängden av ekvivalensklasser av $R \times D$ under ekvivalensrelationen

$$[a, c] \sim [b, d] \iff ad = bc$$

och vi definierar addition och multiplikation genom

$$[a, c] + [b, d] = [ad + bc, cd] \quad \text{och} \quad [a, c] \cdot [b, d] = [ab, cd].$$

Vi behöver konstatera att dessa operationer är väldefinerade, dvs att

$$(a, c) \sim (a', c'), \quad (b, d) \sim (b', d') \Longrightarrow (ad + bc, cd) \sim (a'd' + b'c, c'd'), (ab, cd) \sim (a'b', c'd')$$

Detta kan vi se genom att

$$(a'd' + b'c')cd - (ad + bc)c'd' = (a'c - ac')dd' + (b'd - bd')cc' = 0$$

och

$$abc'd' - a'b'cd = (ac' - a'c)bd' + (bd' - b'd)a'c = 0.$$

Vidare behöver vi se att operationerna uppfyller ringaxiomen, att multiplikationen är kommutativ och att det finns en etta. Allt detta följer från egenskaperna hos operationerna på R.

Den injektiva homomorfin $R \longrightarrow D^{-1}R$ ges av $a \mapsto [ab, b]$ för något b i D och ettan ges av $[b, b]$ för $b \in D$.

Om vi nu har en annan ring S med de två översta egenskaperna kan vi få en injektiv homomorfi

$$D^{-1}R \longrightarrow D^{-1}S \cong S$$