KTH Teknikvetenskap

SF2703 Algebra grundkurs
Exempeltentamen

Skrivtid: 8.00-13.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Uppgifterna bedöms med upp till 9 poäng. Ett resultat från den löpande examinationen kan tillgodoräknas istället för motsvarande uppgift. Den som efter tentamen saknar högst en del för att bli godkänd erhåller betyget *Fx* och har möjlighet att skriva en kompletteringstentamen på den delen. Vid omtentamen i juni kommer enbart kontrollskrivningsresultat att kunna tillgodoräknas.

För att få ett godkänt betyg på tentamen krävs minst 3 poäng på varje uppgift. Betyget ges då enligt följande

Betyg	*Poäng*	*Poäng per del*
A	18-27	≥ 6
B	18-22	≥ 4
C	15-17	≥ 4
D	12-14	≥ 3
E	9-11	≥ 3
Fx	6-20	≥ 3 på två delar
F	0-13	< 3 på mer än en del

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl! Presentationen ger upp till 3 poäng på varje uppgift.

(1) a) Definiera normalisatorn till en delmängd A av en grupp G. **(1)**

b) Bestäm normalisatorn till $A = \{(12), (24)\}$ i $G = S_4$. **(2)**

c) Bestäm kärnan till den homomorfi, $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^*$, som ges av

$$\Phi(t) = e^{it},$$

för alla t i $\mathbb{R}$. **(1)**

d) Bestäm kvoten $\mathbb{R}/\ker\Phi$ i uppgift b). **(1)**

e) Bestäm ordningen av samtliga element i dihedrala gruppen D_{12}. **(2)**

f) Visa att alla delgrupper i en cyklisk grupp är cykliska och att en ändlig cyklisk grupp har precis en delgrupp av varje ordning som delar gruppens ordning. **(2)**

(2) a) Definiera vad som menas med en p-delgrupp. **(1)**

b) Formulera Sylows sats. **(2)**

c) Använd Sylows sats för att visa att varje grupp av ordning 33 är abelsk. **(2)**

d) Skriv upp alla abelska grupper av ordning 100 och 145. **(2)**

e) Låt $G = S_n$ för något n. Visa att

$$G_i = \{g \in G | g(i) = i\}$$

är en delgrupp av index n som inte är normal. **(2)**

(3) a) Definiera vad som menas med ett principalidealområde. **(1)**

b) Visa att ett Euklidiskt område är ett principalidealområde. **(2)**

c) Bestäm alla maximalideal i $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2x + 1)$. **(2)**

d) Visa att (0) är ett maximalideal i matrisringen $M_3(\mathbb{R})$. **(2)**

e) Visa att matriserna på formen

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

där a, b och c är reella tal bildar en kommutativ ring med etta som är isomorf med $\mathbb{R}[x]/(x^3 - 1)$. **(2)**