KTH Teknikvetenskap

SF2703 Algebra grundkurs
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 1
Måndagen den 4 februari, 2008

Uppgift.

a) Definiera vad som menas med att H är en normal delgrupp i G. **(1)**

b) Visa att skärningen, $H = \bigcap_{i\in I} H_i$, av normala delgrupper, $\{H_i\}_{i\in I}$ i en grupp G, är en normal delgrupp i G. **(1)**

c) Låt p vara ett primtal och låt $G \subseteq \mathbb{C}$ vara alla komplexa tal, z, sådana att $z^{p^n} = 1$ för något heltal $n \geq 0$. Visa att G bildar en grupp under multiplikation. **(1)**

d) Låt G vara gruppen från uppgift c). Visa att $\Phi : G \longrightarrow G$, som ges av $\Phi(z) = z^p$, är en homomorfi. Bestäm kärnan och bilden till Φ. **(2)**

e) Visa att delmängden, H, av övertriangulära matriser i $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{Z}_3)$ bildar en delgrupp och beräkna antalet sidoklasser till H i $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{Z}_3)$. **(2)**

f) Visa att $\langle(1\,2\,3),(3\,4\,5)\rangle = A_5 \subseteq S_5$. **(2)**

Lösningsförslag.

a). Att H är normal delgrupp i G betyder att H är en delgrupp som uppfyller

$$gHg^{-1} = H$$

för alla element g i G. Detta kan också formuleras som att $N_G(H) = G$, att $gH = Hg$ för alla $g \in G$ eller att högersidoklasserna till H är lika med vänstersidoklasserna till H.

b). Att H_i är normal betyder att $gH_ig^{-1} = H_i$ för alla g i G. Om nu $h \in H = \bigcap_{i\in I} H_i$, så ligger h i alla H_i och därmed ligger ghg^{-1} också i alla H_i. Alltså ligger ghg^{-1} i skärningen $H = \bigcap_{i\in I} H_i$ och H är normal.

c). För att visa att G är en grupp under multiplikation kan vi se att det är en delmängd i gruppen av inverterbara komplexa tal, $\mathbb{C}^*$. Det räcker därför att visa att G är sluten under multiplikation och invertering. Om z_1 och z_2 ligger i G har vi $z_1^{p^m} = 1$ och $z_2^{p^n} = 1$, för några heltal m och n, men det innebär att

$$z_1^{p^{m+n}} = (z_1^{p^m})^{p^n} = 1 \quad \text{och} \quad z_2^{p^{n+m}} = (z_2^{p^n})^{p^m} = 1.$$

Alltså är

$$(z_1 z_2)^{p^{m+n}} = 1/1$$

eftersom mulitiplikationen i $\mathbb{C}$ är kommutativ och vi får att G är sluten under multiplikation. Dessutom har vi att

$$(z_1^{-1})^{p^m} = (z_1^{p^m})^{-1} = 1,$$

vilket visar att G är sluten under inversen. Alltså bildar G en delgrupp i $\mathbb{C}^*$ och är därmed en grupp under multiplikation.

d). Vi definierar $\Phi(z) = z^p$ och behöver visa att $\Phi(z_1 z_2) = \Phi(z_1)\Phi(z_2)$ för $z_1, z_2 \in G$. Vi får att

$$\Phi(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^p = z_1^p z_1^p = \Phi(z_1)\Phi(z_2)$$

eftersom multiplikationen i $\mathbb{C}$ är kommutativ. För att se att det verkligen blir en funktion från G till G och inte bara från G till $\mathbb{C}$ ser vi att

$$\Phi(z)^{p^n} = (z^p)^{p^n} = (z^{p^n})^p = 1^p = 1$$

om $z^{p^n} = 1$.

Kärnan ges av alla element som går på enhetselementet, som i det här fallet är 1. Alltså får vi

$$\ker \Phi = \{z \in G | z^p = 1\} = \{z \in \mathbb{C} | z^p = 1\}.$$

Detta är bara de p enhetsrötterna.

Bilden ges av hela G, eftersom $z^{p^n} = 1$ innebär att om $w^p = z$, så är $w^{p^{n+1}} = z^{p^n} = 1$, vilket visar att också p:te roten av z ligger i G om z gör det.

e). Eftersom $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{Z}_3)$ är en ändlig grupp räcker det att visa att H är sluten under multiplikation. Vi har att

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix}$$

vilket visar att delmängden av övertriangulära matriser är sluten under multiplikation.

För att beräkna antalet sidoklasser kan vi använda oss av Lagranges sats som säger att antalet sidoklasser är lika med kvoten mellan ordningarna. Vi kan lätt räkna antalet element i H, eftersom diagonalelementen måste vara nollskilda och det övre högra elementet kan vara vad som helst. Detta ger $|H| = 2^2 \cdot 3 = 12$.

För att räkna ut ordningen av $G = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{Z}_3)$ kan vi se att den verkar transitivt på de nollskilda elementen i $\mathbb{Z}_3^2 \setminus \{0\}$. Om $x = (1,0)^T$ får vi stabilisatorn till

$$G_x = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z}_3, c \in \mathbb{Z}_3^* \right\}.$$

Detta visar att $|G_x| = 2 \cdot 3 = 6$ och $|Gx| = 3^2 - 1 = 8$. Alltså ges ordningen av $G = \mathrm{Gl}_2(\mathbb{Z}_3)$ av

$$|G| = |G_x| \cdot |Gx| = 6 \cdot 8 = 48$$

och antalet sidoklasser till H i G är $|G|/|H| = 48/12 = 4$.

f). Den alternerande gruppen består av alla jämna permutationer och dessa kan genereras av alla produkter av två transpositioner $s_i s_j$, där $s_i = (i\, i+1)$, för $i = 1, 2, 3, 4$. Till att börja med ser vi att

$$s = (1\,2\,3) = (1\,2)(2\,3) = s_1 s_2 \quad \text{och} \quad r = (3\,4\,5) = (3\,4)(4\,5) = s_3 s_4.$$

Genom att konjugera får vi

$$\begin{aligned} rsr^{-1} &= (1\,2\,4) &&= (1\,2)(2\,4), \\ r^2sr^{-2} &= (1\,2\,5) &&= (1\,2)(2\,5), \\ srs^{-1} &= (1\,4\,5) &&= (1\,4)(4\,5), \\ s^2rs^{-2} &= (2\,4\,5) &&= (2\,4)(4\,5), \end{aligned}$$

Eftersom elementens inverser också ligger i delgruppen som genereras av dessa har vi nu

$$s_1 s_2 = s, \quad s_1 s_4 = (rsr^{-1})(s^2rs^{-2}), \quad s_1 s_3 = s_1 s_4 s_4 s_3 = s_1 s_4 r^{-1}.$$

Eftersom dessa ligger i delgruppen som genereras av s och r får vi också

$$s_2 s_3 = s_2 s_1 s_1 s_3, \quad s_2 s_4 = s_2 s_1 s_1 s_4$$

och nu ligger alla produkter av två av transpositionerna s_1, s_2, s_3, s_4 i delgruppen, vilket visar att det är hela A_5.

Svar:

a) $H \leq G$ är normal om $gHg^{-1} = H$ för alla $g \in G$.
d) Kärnan är $\{z \in \mathbb{Z} | z^p = 1\}$ och bilden är hela G.
e) Antalet sidoklasser till H är 4.

Bedömningskriterier.

a) Helt korrekt definition på någon av formerna, **1 poäng**.
b) Korrekt bevis för att skärningen är normal, **1 poäng**.
c) Korrekt bevis av att G bildar en grupp, **1 poäng**.
d)
- Korrekt bevis för att det är en homomorfi, **1 poäng**.
- Korrekt beräknad kärna och bild, **1 poäng**.

e)
- Korrekt bevis av att H är en delgrupp, **1 poäng**.
- Korrekt motiverat antal sidoklasser, **1 poäng**.

f)
- Korrekt beskrivning av generatorerna till A_5, **1 poäng**.
- Korrekt bevis av att dessa generatorer ligger i $\langle (1\,2\,3), (3\,4\,5) \rangle$, **1 poäng**.