KTH Teknikvetenskap

SF2703 Algebra grundkurs
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 2
Onsdagen den 20 februari, 2008

Uppgift.

a) Formulera klassekvationen. Var noggrann med att tala om vad alla ingående symboler betyder. **(1)**

b) Använd klassekvationen för att visa att en grupp av ordning p^3 har ett icketrivialt centrum om p är ett primtal. **(2)**

c) Bestäm antalet permutationer i S_8 som kommuterar med $(16)(24)(378)$. **(2)**

d) Ge exempel på en p-Sylowdelgrupp i den symmetriska gruppen S_{2p}, där p är ett udda primtal. **(2)**

e) Ange ett heltal n sådant att det finns precis fem olika abelska grupper av ordning n. **(2)**

Lösningsförslag.

a). För varje änglig grupp G gäller att

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{|C_G(g_i)|}$$

där $Z(G)$ är centret i G och $C_G(g_i)$ är centralisatorn till g_i, där $g_1, g_2, \ldots, g_r$ är representanter för de r konjugatklasser som inte ligger i centret.

b). Enligt klassekvationen har vi att

$$p^3 = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{|C_G(g_i)|}$$

och eftersom varje term i summan måste vara delbar med p, så måste även $|Z(G)|$ vara delbar med p, vilket betyder att centret inte bara kan innehålla ett element.

c). Vi kan beräkna antalet permutationer som kommuterar med $\sigma = (16)(24)(378)$ genom att se på antalet permutationer som är konjugerade med σ. Detta är detsamma som att räkna antalet permutationer som har cykeltyp 12^23, dvs en ettcykel, två tvåcykler och en trecykel. Vi kan välja trecykeln på $(8 \cdot 7 \cdot 6)/3$ sätt och därefter ettcykeln på 5 sätt. Vi har sedan fyra element kvar att sätta ihop till två tvåcykler, och det kan vi göra på 3 sätt eftersom det för varje element finns tre andra att para ihop det med. Totalt har vi

$$|C_G(\sigma)| = \frac{|S_8|}{\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3}\cdot 5\cdot 3} = 3\cdot 4\cdot 2 = 24.$$

d). Om p är ett udda primtal har vi att p-Sylowdelgrupperna har ordning p^2 och det kan inte finnas något element av ordning p^2, eftersom $p^2 > 2p$. Ett element av ordning p i S_{2p} måste vara en p-cykel eller en produkt av två disjunkta tvåcykler.

Två disjunkta p-cykler genererar en delgrupp av ordning p^2 som är produkten av de två delgrupperna som genereras av de två cyklerna, och vi kan till exempel ta

$$\langle (1\,2\,\cdots\,p), (p+1\,p+2\,\cdots\,2p)\rangle = \langle (1\,2\,\cdots\,p)\rangle \times \langle (p+1\,p+2\,\cdots\,2p)\rangle.$$

e). Enligt struktursatsen för ändligt genererade abelska grupper ska gruppen kunna skrivas som en produkt av cykliska grupper. Om det är två olika primtal inblandade kommer vi att få ett antal grupper som är en produkt av antalet grupper för dessa två faktorer. Alltså kan vi utgå från att $|G| = p^m$. Vi får då antalet grupper av ordning p^m som antalet sätt att skriva m som en summa av avtagande positiva heltal. För $m = 4$ får vi $4 = 4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$, vilket är precis fem olika sätt. För lägre m får vi färre sätt och för högre m får vi fler sätt. Alltså måste vi välja $n = p^4$, för något primtal p.

Bedömningskriterier.

a) Korrekt uppställning av klassekvationen, **1 poäng**.

b) Korrekt användning av klassekvationen för att visa att centret är icke-trivialt, **2 poäng**

c)
- Korrekt bestämning av antalet element som är konjugerade till σ, **1 poäng**
- Korrekt användning av relationen mellan konjugatklassens storlek och centralisatorns storlek för att bestämma ordningen av centralisatorn, **1 poäng**

d)
- Korrekt bestämning av ordningen av en p-Sylowdelgrupp, **1 poäng**.
- Korrekt motiverat exempel, **1 poäng**

e)
- Korrekt formulering av struktursatsen för ändligt genererade abelska grupperbevis, **1 poäng**.
- Korrekt motiverat exempel på n, **1 poäng**.