KTH Teknikvetenskap

SF2703 Algebra grundkurs
Lösningsförslag med bedömningskriterier till exempelkontrollskrivning 2

Uppgift.

a) Definiera vad som menas med en p-delgrupp. **(1)**
b) Formulera Sylows sats. **(2)**
c) Använd Sylows sats för att visa att varje grupp av ordning 33 är abelsk. **(2)**
d) Skriv upp alla abelska grupper av ordning 100 och 145. **(2)**
e) Låt $G = S_n$ för något n. Visa att

$$G_i = \{g \in G | g(i) = i\}$$

är en delgrupp av index n som inte är normal. **(2)**

Lösningsförslag.

a). En p-delgrupp är en delgrupp av ordning p^n, där p är ett primtal och n är ett positivt heltal.

b). Sylows sats säger att

i) För varje primtal, p, som delar ordningen av G finns en Sylow p-delgrupp, dvs en grupp av ordning p^n där p^n är den högsta potens av p som delar $|G|$.
ii) För varje p-Sylowdelgrupp P och varje p-delgrupp Q finns ett elemet g i G så att $Q \subseteq gPg^{-1}$.
iii) Antalet p-Sylowdelgrupper är kongruent med 1 modulo p och en delare i $m = |G|/p^n$.

c). Eftersom gruppens ordning är $33 = 3 \cdot 11$ har vi 3-Sylowdelgrupper och 11-Sylowdelgrupper. Antalet 3-Sylowdelgrupper är 1, eftersom det ska vara kongruent med 1 modulo 3 samtidigt som det ska vara en delare i 11. På samma vis är antalet 11-Sylowdelgrupper 1, eftersom det ska vara en delare i 3 som är kongruent med 1 modulo 11. Detta visar enligt andra delen av Sylows sats att båda dessa delgrupper måste vara normala. Vi har också att skärningen är 1, eftersom ordningen av skärningen måste dela 3 och 11. Alltså är gruppen en direkt produkt av de två Sylowdelgrupperna. Eftersom 3 och 11 är primtal är Sylowdelgrupperna cykliska och därmed är hela gruppen cyklisk.

d). Vi har enligt struktursatsen för ändligt genererade abelska grupper att de måste vara produkter av cykliska grupper. Vi primtalsfaktoriserar $100 = 2^2 \cdot 5^2$ och $145 = 5 \cdot 29$ och ser att det finns fyra möjligheter för en grupp av ordning 100, nämligen

$$\mathbb{Z}_{100}\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}, \quad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$$

medan det bara finns en möjlighet för en abelsk grupp av ordning 145, nämligen

$$\mathbb{Z}_{145} \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{29}.$$

e). Eftersom G_i är stabilisatorn till elementet i, när G verkar på $\{1, 2, \ldots, n\}$ är det en delgrupp och dess index kan fås som antalet element i banan till i. Eftersom G verkar transitivt på $\{1, 2, \ldots, n\}$ är detta antal n. Att G_i inte är normal kan vi se genom att konjugera med en transposition (ij), vilket ger

$$(ij)G_i(ij)^{-1} = G_j$$

vilket skiljer sig från G_i om $i \neq j$.

Bedömningskriterier.

a) Korrekt definition av p-delgrupp, **1 poäng**.

b)
- Korrekt formulering av en av delarna i Sylows sats, **1 poäng**
- Korrekt formulering av övriga delar i Sylows sats, **1 poäng**

c)
- Korrekt användning av Sylows sats för att bestämma antalet p-Sylowdelgrupper för $p = 3$ och $p = 11$, **1 poäng**
- Korrekt slutfört bevis av att gruppen är abelsk, **1 poäng**

d)
- Korrekt användning av struktursatsen för ändligt genererade abelska grupper, **1 poäng**.
- Korrekt motiverade möjliga abelska grupper, **1 poäng**

e)
- Korrekt bevis av att G_i är en delgrupp av index n, **1 poäng**.
- Korrekt bevis av att G_1 inte är normal, **1 poäng**.