KTH Teknikvetenskap

SF2703 Algebra grundkurs
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 3
Onsdagen den 5 mars, 2008

Uppgift.

a) Definiera vad som menas med ett primideal i en kommutativ ring. **(1)**

b) Låt R vara en kommutativ ring med etta. Visa att kvoten R/I är ett integritetsområde om och endast om I är ett primideal. **(2)**

c) Bestäm samtliga ideal i ringen $k[x]/(x^2)$, där k är en kropp. **(2)**

d) Visa att $x^5 - 3x + 6$ är irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$. **(2)**

e) Låt G vara en ändlig grupp och låt RG vara gruppringen till G med koefficienter i en kommutativ ring med etta. Visa att det finns en ringhomomorfi $\Phi : RG \longrightarrow R$ som uppfyller $\Phi(ag) = a$ för alla g i G och alla a i R. **(2)**

Lösningsförslag.

a). Ett ideal I i en kommutativ ring R är ett primideal om ab ligger i I om och endast om någon av a eller b ligger i I.

b). Om I är ett primideal och $(a + I)(b + I) = I$ i kvotringen R/I har vi att ab ligger i I och därmed får vi $a \in I$ eller $b \in I$, vilket leder till att någon av faktorerna $a + I$ eller $b + I$ är noll i R/I.

Om R/I är ett integritetsområde har vi att $ab \in I$ ger att $(a + I)(b + I) = I$, vilket innebär att $a + I = I$ eller $b + I = I$, men detta är detsamma som att $a \in I$ eller $b \in I$. Alltså är I ett integritetsområde.

c). Ett element i kvoten $k[x]/x^2$ är en sidoklass till idealet (x^2) och har därför en unik representant av grad högst ett. Vi kan alltså identifiera elementen i $k[x]/(x^2)$ med linjära polynom $a + b\bar{x}$ där $\bar{x}$ är sidoklassen $x + (x^2)$ och $\bar{x}^2 = 0$. Om $a \neq 0$ har vi att $(a + b\bar{x})(a - b\bar{x}) = a^2$ vilket visar att $a + b\bar{x}$ är inverterbart och $(a + b\bar{x}) = (1)$. Ett äkta ideal I måste det därmed bara innehålla element på formen $b\bar{x}$. Om $b \neq 0$ har vi att $(b\bar{x}) = (\bar{x})$ eftersom b är inverterbart. Därmed får vi bara tre olika ideal i $k[x]/(x^2)$, nämligen (0), $(\bar{x})$ och (1).

d). Enligt Gauss lemma är polynomet irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$ om och endast om det är irreducibelt i $\mathbb{Z}[x]$ och i $\mathbb{Z}[x]$ kan vi använda oss av Eisensteins kriterium eftersom polynomet är moniskt och primtalet 3 delar alla andra koefficenter. Däremot delar inte 3^2 konstanttermen som är 6, vilket visar att polynomet är irreducibelt i $\mathbb{Z}[x]$.

e). Vi kan räkna upp elementen i G som $g_1, g_2, \ldots, g_n$ och därmed skriva elementen i RG som $\sum_{i=1}^n a_i g_i$ där $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ligger i ringen R. En homomorfi som uppfyller $\Phi(ag) = a$ för alla g i G och a i R måste därmed ges av att

$$\Phi(a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_n g_n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

eftersom en homomorfi bevarar additionen. Vi kan nu se att detta blir en homomorfi av ringar genom att

$$\begin{aligned} \Phi\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i + \sum_{i=1}^n b_i g_i\right) &= \Phi\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) g_i\right) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \Phi\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i\right) + \Phi\left(\sum_{i=1}^n b_i g_i\right) \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \Phi\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i g_i\right) &= \Phi\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j g_i g_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i\right) = \Phi\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i\right) \cdot \Phi\left(\sum_{i=1}^n b_i g_i\right). \end{aligned}$$

Bedömningskriterier.

a) Korrekt definition av primideal, **1 poäng**.

b)
- Korrekt implikation åt ena hållet, **1 poäng**.
- Korrekt implikation åt andra hållet, **1 poäng**.

c)
- Korrekt beskrivning av elementen i ringen, **1 poäng**.
- Korrekt motiverade ideal, **1 poäng**.

d)
- Korrekt användning av Gauss lemma, **1 poäng**.
- Korrekt användning av Eisensteins kriterium, **1 poäng**.

e)
- Korrekt definierad homomorfi Φ, **1 poäng**.
- Korrekt bevis av att Φ är en homomorfi, **1 poäng**.