KTH Teknikvetenskap

SF2703 Algebra grundkurs
Lösningsförslag med bedömningskriterier till exempelkontrollskrivning 3

Uppgift.

a) Definiera vad som menas med ett principalidealområde. **(1)**
b) Visa att ett Euklidiskt område är ett principalidealområde. **(2)**
c) Bestäm alla maximalideal i $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2x + 1)$. **(2)**
d) Visa att (0) är ett maximalideal i matrisringen $M_3(\mathbb{R})$. **(2)**
e) Visa att matriserna på formen

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

där a, b och c är reella tal bildar en kommutativ ring med etta som är isomorf med $\mathbb{R}[x]/(x^3 - 1)$. **(2)**

Lösningsförslag.

a). Ett principalidealområde är ett integritetsområde där varje ideal kan genereras av ett element.

b). Om I är ett nollskilt ideal i ett Euklidiskt område kan vi låta d vara ett element av minsta norm i I, vilket betyder att alla nollskilda element i I har minst samma norm som d. Om a är ett element i I kan vi skriva $a = kd + r$ där $N(r) < N(d)$ eller $r = 0$. Eftersom $r = a - kd \in I$ måste $r = 0$ eftersom d har minimal norm i I. Alltså får vi $a = kd$ och $I = (d)$, vilket är ett principalideal.

c). Vi kan faktorisera $x^3 - 2x + 1$ som $(x - 1)(x^2 + x - 1)$ där bägge faktorer är irreducibla eftersom $x^2 + x - 1$ inte har några rationella nollställen. Alltså är faktorerna relativt prima och vi får enligt kinesiska restsatsen att

$$\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2x + 1) \cong \mathbb{Q}[x]/(x - 1) \times \mathbb{Q}[x]/(x^2 + x - 1)$$

där de båda faktorerna i högerledet är kroppar. Alltså finns två maximalideal, ett till vardera kropp. Det första genereras av $x^2 + x - 1$ och ger kvoten $\mathbb{Q}$ och det andra genereras av $x - 1$ och ger kvoten $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + x - 1) \cong \mathbb{Q}[(-1 + \sqrt{5})/2] \cong \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$.

d). (0) är ett ideal i alla ringar eftersom det är en abelsk delgrupp och $a \cdot 0 = 0 \cdot a$ för alla a i en ring. För att visa att (0) är ett maximalideal kan vi visa att varje annat ideal är hela ringen. Antag att ett idal I innehåller ett nollskilt element. Vi kan då multiplicera A med en matris till vänster som har nollskilda element bara i rad i så att resultatet blir en matris vars enda nollskilda element ligger i rad i och till höger med en matris som har nollskilda element bara i kolonn j så att de enda nollskilda elementen ligger i kolonn j. Detta går att göra för alla i och j och därmed kan vi få varje matris i $M_3(\mathbb{R})$ som ett som en summa av matriser B_iAC_j och $(A) = M_3(\mathbb{R})$.

e). Om vi låter

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kan vi skriva alla matriser i ringen som $aI + bJ + cK$. Dessutom ser vi att $J^2 = K$ och $J^3 = I$. Därmed kan vi få en surjektiv homomorfi $\mathbb{R}[x] \longrightarrow R$ genom att sända $f(x)$ på $f(J)$. Kärnan till denna homomorfi ges av $x^3 - 1$ och därmed får vi den önskade isomorfin av ringar.

Bedömningskriterier.

a) Korrekt definition av principalidealområde, **1 poäng**.

b)
- Korrekt generator till idealet, **1 poäng**
- Korrekt bevis att ett element av minsta norm genererar idealet, **1 poäng**

c)
- Korrekt användning av kinesiska restsatsen för att beskriva ringen, **1 poäng**
- Korrekt slutsats om de två maximala idealen, **1 poäng**

d) Korrekt bevis för att alla nollskilda element genererar hela ringen, **2 poäng**.

e)
- Korrekt bevis för att ringen är kommutativ och har etta, **1 poäng**.
- Korrekt bevis av isomorfin, **1 poäng**.