Kontrollskrivning, 2008-09-26, kl. 13.00–15.00.

SF1602 Differential- och Integralkalkyl (envariabel) linje, för .

Kontrollskrivning MODUL 1. Skriv **program:** **samt namn och personnummer:**

1. (MODUL 1) Funktionen f definieras av

$$f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{x}.$$

(a) Ange eventuella asymptoter till f.

(b) Rita grafen till funktionen i stora drag.

Vi ser att $f(x)$ ej är definierat i $x = 0$, men att

$$f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{x} = x + \frac{\sin x}{x} \to 1 \text{ då } x \to 0.$$

Det betyder att lodräta asymptoter saknas. Efersom

$$f(x) - x = \frac{\sin x}{x} \to 0 \text{ då } x \to \pm\infty$$

är $y = x$ en sned asymptot. Av tekniska skäl avstår vi från att här rita grafen.

---

2. (MODUL 1) Undersök om

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$$

för alla positiva heltal n. Om det är osant, visa med ett motexempel, medan om det är sant, visa det med ett induktionsargument.

Ett test av $n = 1, 2, 3, 4$ antyder att likheten kan vara sann.

Låt $P(n)$ vara hypotesen att likhet gäller för n. Då vet vi att $P(1)$ är sann genom instoppning. Antag att $P(k)$ gäller:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{k-1}k^2 = \frac{(-1)^{k-1}k(k+1)}{2}.$$

Vänster led för $n = k + 1$ blir då

$$\begin{aligned} &1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^k(k+1)^2 \\ &\quad = \frac{(-1)^{k-1}k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2 = (-1)^k(k+1)\left(k+1-\frac{k}{2}\right) \\ &\quad = \frac{(-1)^k(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Vi finner att $P(k+1)$ då också gäller. Enligt induktionsprincipen gäller nu $P(n)$ för alla positiva heltal n.

3. (MODUL 1) Betrakta funktionen

$$f(x) = \arccos(3x).$$

(a) Ange definitionsmängd och värdemängd till funktionen.

(b) Skriv upp inversfunktionen till f, med angivande av definitionsmängd och värdemängd för inversen.

(a) Definitionsmängden blir $[-1/3, 1/3]$, och värdemängden blir $[0, \pi]$.

(b) Inversfunktionen blir

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\cos x,$$

och dess definitionsmängd är $[0, \pi]$ och värdemängden är $[-1/3, 1/3]$.