

Tentamensskrivning, 2007-12-21, kl. 08.00–13.00.

SF1602 Diffint (envariabel), för F.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För att tillgodoräkna sig resultat från denna del krävs minst 5 av 6 moduler godkända från Del 1. För betyg *A* krävs 28 poäng, för betyg *B* krävs 20 poäng, och för betyg *C* krävs 12 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

**TENTAMENSSKRIVNING: DEL 2. LÖSNINGSFÖRSLAG**

11. Vi betraktar funktionen

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Rita grafen till funktionen, med indikation om var funktionen växer och var den avtar, eventuella asymptoter, och konvexitet-konkavitet samt eventuella inflexionspunkter. (5)

Funktionen har  $x = 0$  som vertikal asymptot, eftersom vi delar med  $x$  och  $e^{-0} = 1$ . Dessutom har vi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0,$$

vilket gör  $y = 0$  till horisontell asymptot. Några fler asymptoter finns ej, eftersom exponentialfunktionen  $e^{-x}$  växer för snabbt då  $x \rightarrow -\infty$ .

Vi deriverar:

$$f'(x) = -\frac{x+1}{x^2} e^{-x}, \quad x \neq 0.$$

Detta ger att  $f'(x) > 0$  om  $x < -1$ , och  $f'(x) < 0$  om  $x > -1$  och  $x \neq 0$ . Funktionen är alltså strängt växande på intervallet  $] -\infty, -1]$ , och strängt avtagande på intervallen  $[-1, 0[$  och  $]0, +\infty[$ . Vi deriverar nu en gång till:

$$f''(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3} e^{-x}.$$

Eftersom  $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geq 1$  ser vi att  $f''(x) < 0$  på intervallet  $] -\infty, 0[$  samt att  $f''(x) > 0$  på intervallet  $]0, +\infty[$ . Därför är  $f(x)$  strängt konkav på  $] -\infty, 0[$ , och strängt konvex på  $]0, +\infty[$ . Inflexionspunkter saknas. På tekniska problem avstår vi från att rita upp grafen.

12. Betrakta den generaliserade integralen

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx,$$

där  $\alpha$  är en reell parameter. Avgör för vilka  $\alpha$  som integralen konvergerar. (5)

Vi delar upp integrationen i två delar:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx.$$

Eftersom  $\frac{\pi}{4} \arctan x \leq \frac{\pi}{2}$  på  $[1, +\infty)$ , kan vi göra jämförelsen

$$\frac{\pi}{4} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx \leq \frac{\pi}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Integranden är positiv, och jämförelsekriterier kan användas. Vi vet att integralen

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

konvergerar precis då  $\alpha > 1$ . Avseende integralen på  $[0, 1]$ , kan vi säga att

$$\frac{x}{2} \leq \arctan x \leq x, \quad 0 < x \leq 1,$$

så att

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x}{x^\alpha} dx \leq \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx \leq \int_0^1 \frac{x}{x^\alpha} dx.$$

Integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx$$

konvergerar precis då  $\alpha < 2$ . Detta innebär att vår integral konvergerar om och endast om  $1 < \alpha < 2$ .

---

13. Betrakta summan

$$I_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \dots + \frac{1}{n+n}.$$

Beräkna gränsvärdet av  $I_n$  då  $n \rightarrow +\infty$ . (5)

---

Vi skriver

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

Detta gör att  $I_n$  blir en Riemannsumma (ev kan man ta bort första termen för att få det så) för integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \left[ \ln(1+x) \right]_0^1 = \ln 2.$$

Vi får således  $I_n \rightarrow \ln 2$  då  $n \rightarrow +\infty$ .

---

14. Beräkna integralen

$$\int_0^1 \arctan \sqrt{x} dx.$$

(5)

---

Vi gör variabelbytet  $t = \sqrt{x}$ ,  $dx = 2t dt$ , och får

$$\int_0^1 \arctan \sqrt{x} dx = 2 \int_0^1 t \arctan t dt.$$

Därefter följer partiell integration:

$$2 \int_0^1 t \arctan t dt = \left[ t^2 \arctan t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt.$$

Nu blir integrationen lätt:

$$\int_0^1 \arctan \sqrt{x} dx = \frac{\pi}{4} - 1 + \left[ \arctan t \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

---

15. Lös differentialekvationen

$$y'' + y = x^2 + xe^x$$

fullständigt.

(5)

---

Vi löser först det homogena problemet

$$y'' + y = 0.$$

Motvarande karakteristiska ekvation blir

$$r^2 + 1 = 0,$$

med rötter

$$r = \pm i.$$

Den allmänna homogena lösningen kan skrivas

$$y_h = B_1 e^{ix} + B_2 e^{-ix} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Nu behöver vi bara en partikulärlösning  $y_p$ . Vi kollar att

$$y_p = x^2 - 2 + \frac{1}{2}(x-1)e^x$$

funkar. Vi får den allmänna lösningen

$$y = y_p + y_h = x^2 - 2 + \frac{1}{2}(x-1)e^x + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

---

16. En viss kemikalie löses upp i vatten med en hastighet som är proportionell mot produkten av den oupplösta mängden och differensen mellan koncentrationen i en mättad lösning och den aktuella koncentrationen. Man vet att i 100 ml mättad lösning är 50 g av kemikalien löst. Om 30 g av kemikalien rörs ned i 100 ml rent vatten så löses 10 g på 2 timmar. Hur mycket har lösts upp efter 5 timmar?

(5)

---

V.g. vänd!

Låt  $x$  beteckna mängden löst kemikalie, i gram. Koncentrationen blir då  $x/100$ , och mättad koncentration blir  $50/100$ . Vi ställer upp ekvationen

$$\frac{dx}{dt} = k(30 - x)(50 - x),$$

där tiden  $t$  mäts i timmar. Enligt variabelseparationsmetoden får vi

$$\int \frac{dx}{(30 - x)(50 - x)} = \int k dt,$$

med lösning

$$\ln \frac{50 - x}{30 - x} = k_1 t + C,$$

där  $k_1$  är relaterad till  $k$ . Eftersom  $x(0) = 0$  har vi

$$C = \ln \frac{50}{30} = \ln \frac{5}{3},$$

och eftersom  $x(2) = 10$  blir

$$\ln \frac{50 - 10}{30 - 10} = \ln 2 = 2k_1 + C = 2k_1 + \ln \frac{5}{3},$$

dvs

$$k_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{6}{5}.$$

Lösningen har alltså formen

$$\ln \frac{50 - x}{30 - x} = \frac{t}{2} \ln \frac{6}{5} + \ln \frac{5}{3}.$$

Vid  $t = 5$  blir därför

$$\ln \frac{50 - x(5)}{30 - x(5)} = \frac{5}{2} \ln \frac{6}{5} + \ln \frac{5}{3}.$$

Detta betyder att

$$\frac{50 - x(5)}{30 - x(5)} = \frac{5}{3} \frac{6^{5/2}}{5^{5/2}}.$$

Lite ekvationslösning ger nu att

$$x(5) = 150 \frac{6^{5/2} - 5^{5/2}}{5 \cdot 6^{5/2} - 3 \cdot 5^{5/2}} \approx 18 \text{ g.}$$

- 
17. Bestäm värdet på den reella parametern  $\beta$ , så att gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\beta x^3) - \beta x^3 + x^9}{x^{15}}$$

existerar. Bestäm sedan även gränsvärdet.

(5)

---

Enligt Maclaurins formel har vi

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + t^7 B(t),$$

där  $B(t)$  är en begränsad funktion. Om vi stoppar in  $t = \beta x^3$  får vi

$$\sin(\beta x^3) = \beta x^3 - \frac{\beta^3 x^9}{6} + \frac{\beta^5 x^{15}}{120} + \beta^7 x^{21} B(\beta x^3).$$

Därför är

$$\sin(\beta x^3) - \beta x^3 + x^9 = \left(1 - \frac{\beta^3}{6}\right)x^9 + \frac{\beta^5 x^{15}}{120} + \beta^7 x^{21} B(\beta x^3),$$

och vi ser att

$$\beta = 6^{1/3}$$

för att gränsvärdet ska existera. Vi får då

$$\frac{\sin(\beta x^3) - \beta x^3 + x^9}{x^{15}} = \frac{\beta^5}{120} + \beta^7 x^6 B(\beta x^3) \rightarrow \frac{\beta^5}{120} = \frac{6^{5/3}}{120}$$

då  $x \rightarrow 0$ .