

Uppgifter inför KS2, Matematik II för CL. VT09.

1. Bestäm alla värden på a, b och c så att matrisen A blir symmetrisk

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 2b + 2c & 2a + b + c \\ 3 & & 5 & a + c \\ 0 & & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Bestäm inversen till matrisen A då:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Visa att $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{9}{25} & \frac{4}{5} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{5}{3} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$ är en ON matris genom att

- beräkna $A^T A$
- studera radvektorerna i A
- studera kolonnvektorerna i A.

4. Bestäm inversen till matrisen A i uppgift 3 .

5. Vilka av följande matriser är ON-matriser och bestäm i sådana fall den tillhörande inversen.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

6. Bestäm alla egenvärden och motsvarande normerade egenvektorer till följande

matriser:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

7. Bestäm alla egenvärden och motsvarande normerade egenvektorer till

följande matriser:

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} .$$

8. Bestäm egenvärden och tre parvis ortogonala och normerade egenvektorer till

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} .$$

9. Bestäm en ortogonalmatrix P sådan att $P^T A P$ blir en diagonalmatrix D samt ange D då A är matrisen i uppgift 8.

10. Transformera följande ekvationer till huvudaxelform

$$a) 2x^2 + 4xy + y^2 \quad b) 2x^2 - y^2 - z^2 + 4xy - 4xz + 8yz \\ c) 3x^2 + 2xy + 3y^2 \quad d) x^2 + 4xy + y^2 \quad e) x^2 + 4xy - 4yz + z^2$$

11. Ange den geometriska betydelsen om uttrycken i 10a) – e) är

$$a) = 1 \quad b) = -1 \quad c) = 0$$

$$12. \text{ Låt } A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 2 \end{pmatrix} . \text{ Beräkna } A^{11} .$$

Svar:

1. $a=11, b=-9, c=-13$

2. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) invers finns ej c)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

4. $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$

5 a) b) och d) är ON-matriser och inversen är dess transponat.

6. a) $1 = 1, \bar{x} = \pm(4/\sqrt{17}, 1/\sqrt{17})$; $2 = 2, \bar{x} = \pm(3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$.

b) $1 = 3, x_1 = \pm(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$; $2 = 2, x_2 = \pm(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$,

7 a)

$1 = 2, x_1 = \pm(3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13}, 0)$; $2 = 4, \bar{x}_2 = \pm(5/\sqrt{129}, 10/\sqrt{129}, 2/\sqrt{129})$; $3 = 6, x_3 = \pm(1/\sqrt{5}, 2$

b) $1 = 3, x_1 = \pm(1/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11}, 3/\sqrt{11})$; $2 = 3, \bar{x}_2 = \pm(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$; $3 = 3, x_3 = \pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0$

8.

$1 = 6, x_1 = \pm(1/3, 2/3, 2/3)$; $2, 3 = 3, x_2 = \pm(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 0)$, $x_3 = \pm(2/(3\sqrt{5}), 4/(3\sqrt{5}), 5/(3\sqrt{5}))$, (t

9. $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & 2/(3\sqrt{5}) \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/(3\sqrt{5}) \\ 2/3 & 0 & 5/(3\sqrt{5}) \end{pmatrix}$ $D = \text{diag}(-6, 3, 3)$

10. a) $3^2 + 2^2$ b) $6^2 + 3^2 + 3^2$ c) $2^2 + 4^2$ d) $^2 + 3^2$ e) $3^2 + 3^2$

11. = 1 : a) hyperbel b) enmantlad rotationshyperboloid c) ellips d) hyperbel
e) hyperbolisk cylinder

= -1 : a) hyperbel b) tvåmantlad rotationshyperboloid c) ingenting d) hyperbel e)
hyperbolisk cylinder

= 0 : a) två skilda räta linjer genom origo b) cirkulär dubbelkon c) origo d)
två skilda räta linjer genom origo e) två skilda plan genom origo.

	1	10237	2047
1 2.	0	1	0
	0	10245	2048