Uppgifter inför KS4 den 20 april 2009. Matematik II för CL. SF1613.

1. En humla flyger längs kurvan (given på parameterform) $x = 2t^2, y = t^3, t \geq 0$. Då t = 1 upptäcker humlan en blomma i punkten (5,3) och flyger istället iväg längs tangenten. Kommer humlan fram till blomman? (t= tiden).

2. Låt $\overline{F(t)} = (\ln t, 2\sqrt{t}, \frac{t}{2})$. Bestäm längden av $\overline{F(t)}$ mellan t = 1 och t = e.

3. Bestäm tangenterna till $\overline{F(t)}$ i uppgift 2 då t = 1 och t = e samt bestäm vinkeln mellan dessa.

4. Bestäm ekvationen för a) tangentplanet b) normalen till ytan $x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$ i punkten (1,2,-1).

5. Ytorna x + y + z = 3 och $x^2 - y^2 + 2z^2 = 2$ skär varandra längs en rymdkurva. Bestäm normalplanet och tangenten till kurvan i punkten (1,1,1)

6. Ytorna $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ och $x^2 + 1 = (2 - 4a)y^2 + az^2$ skär varandra i punkten (1,-1,2). För vilka värden på a skär de varandra vinkelrätt?

7. Bestäm riktningsderivatan för f(x,y,z) $= (y^2 + \sin z)e^{-x}$ i punkten $(0,2,\pi)$ i riktning mot punkten (1,1,0).

8. Bestäm riktningsderivatan till F $= x^2yz^2$ längs kurvan $x = e^{-u}, y = 2\sin u + 1, z = u - \cos u$ i punkten P då u = 0.

9. Temperaturen i en punkt på xy-planet är T$= \frac{100xy}{x^2 + y^2}$.

a) Bestäm riktningsderivatan i punkten (2,1) i den riktning som bildar 60 graders vinkel med positiva x-axeln.

b) I vilken riktning tagen från (2,1) är derivatan maximal?

c) Vilket är max.värdet?

10. En bit metall upptar området 0<x<1, 0<y<1 i xy-planet. Metallens temperatur är känd som $T = xy(1 - x)(1 - y)$. I vilken riktning skall en insekt som befinner sig i punkten $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ flyga för att svalna så snabbt som möjligt.

11. En bergsklättrare befinner sig i punkten (1,1,2) på berget $z = 4 - x^2 - y^2$ och bestämmer sig för att gå i nordostlig riktning. Går hon uppför eller nedför berget?

12. Bestäm genom att införa variablerna $\begin{cases} u = (x+y)e^{-z} \\ v = (x-y)e^{z} \\ w = z \end{cases}$ den allmänna lösningen till differentialekvationen $yf'_x + xf'_y + f'_z = 0$.

13. Transformera $\frac{\partial z}{\partial x}$ då $z = z(x,y)$ och $x = u + v$, $y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$.

14. Transformera $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ då a) $\begin{cases} u = x + 2y \\ v = 2x + 3y \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x = v + \ln u \\ 2y = -v + \ln u \end{cases}$.

15. Transformera följande uttryck med angivet variabelbyte:

a) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ då $\begin{cases} u = ax - by \\ v = bx + ay \end{cases}$ b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ då $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases}$

c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ då $\begin{cases} x = u + e^{v} \\ y = e^{u} \end{cases}$.

16. Bestäm MacLaurinpolynomet av andra graden till funktionen

a) $\ln(1 + x + y^2)$ b) $e^{xy}\cos(x + y)$ c) $\frac{e^{x+y}}{\cos(x - y)}$

17. Taylorutveckla f(x,y) = $\ln(2x^2 + y^2) - 2y + 2$ omkring punkten (0,1) t o m andra graden.

18. MacLaurinutveckla f(x,y) = $\sin(x^2 + y) + e^{xy}$ t o m tredjegradstermerna.

19. Bestäm MacLaurinutvecklingen av ordning 3 med ordorestterm av funktionerna

a) $xy - x^2 + xy^3$ b) $\ln(x + \cos y)$

20. Beräkna gränsvärdet a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2 x + \sin^2 y}{x^2 + y^2}$ b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{1 - \cos x \cos y}$.

21. Vilka av följande kvadratiska former $\rho(h,k,l)$ är definita, indefinita eller semidefinita?

a) $(h+k)^2$ b) $h^2 + k^2 + kl$ c) $h^2 + k^2 + l^2 + 2hk$ d) $2h^2 + k^2 + l^2 + 2hk + hl$

22. Bestäm lokala extremvärden till följande funktioner då f(x,y) är given av

a) $x^3 + y^2 - 6xy$ b) $x^3 - y^3 - 3xy$ c) $x^3 + y^2 - xy - y$

23. Avgör om följande funktioner är linjära. Ange i sådana fall funktionens matris.

a) $f(x,y) = (x + y, 2x + y, y)^T$ b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

24. Bestäm Jacobimatrisen till : a) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ y = uv \end{cases}$

b) $\bar{f}(x,y,z) = (x^2 + yz, y^2 - x \ln z)$

25. Visa att funktionen f : $\begin{cases} u = x + e^y \\ v = y - e^x \end{cases}$ är lokalt inverterbar och beräkna de partiella derivatorna $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$ svarande mot punkten (x,y)=(0,0). Beräkna även inversens Jacobimatris svarnade mot denna punkt.

26. En yta definieras genom ekvationen $3xyz - z^3 = 10$. Visa att det finns en omgivning av punkten (1,3,2) där ytan kan uppfattas som en graf till en kontinuerligt deriverbar funktion z = z(x,y). Bestäm z'_x och z'_y i punkten (1,3).

27. Beräkna z''_{xy} för den funktion z=z(x,y) som i någon omgivning av punkten (1,1,1) definieras medelst ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + x + y + z = 6$.

28. Visa att ekvationssystemet $\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 0 \\ x + y^3 + z^2 = 0 \end{cases}$ definierar i en omgivning av punkten (-2,1,1) precis två kontinuerligt deriverbara funktioner y=y(x) och z=z(x). Beräkna y'(-2).

29. Kan summan av tre positiva tal vara 5 om deras produkt är 8?

30. Bestäm största och minsta värdet av funktionen f given av $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y$ i den slutna triangeln med hörnen i punkterna (2,-2), (2,3) och (-3,-2).

31. Samma uppgift som i 23 men med f given av $f(x,y) = xy + 3x - 5y$ i mängden $x^2 \le y \le 2 - x$.

Svar:

1. nej

2. $\frac{1}{2}+\frac{e}{2}$

3. Tangenten då t = 1 är (x,y,z) =(t, 2+t, $\frac{1}{2}+\frac{t}{2}$) och tangenten då t = e är (x,y,z) = $(1+\frac{1}{e}t, 2\sqrt{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}t, \frac{e}{2}+\frac{t}{2})$. Vinkeln mellan tangenterna är $\arccos(\frac{4+4\sqrt{e}+e}{3(2+e)})$.

4. a) 6x -11y - 14z +2 = 0 b) (x,y,z) = (1,2,-1) +t(-6,11,14)

5. 3x-y-2z = 0 och (x,y,z) = (1,1,1) + t(3,-1,-2)

6. För alla a-värden

7. $-\frac{8-\pi}{\sqrt{2+\pi^2}}$

8. $\frac{-2}{\sqrt{6}}$

9. a) $12\sqrt{3}-6$ b) (-1,2) c) $12\sqrt{5}$

10. $(-\frac{1}{9},-\frac{1}{16})=-(\frac{1}{9},\frac{1}{16})$

11. nedför berget ($\frac{df}{d\bar{e}}=-2\sqrt{2}$)

12. $f(x,y,z)=g((x+y)e^{-z},(x-y)e^{z})$.

13. $\frac{v}{v+u}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{u}{v+u}\frac{\partial z}{\partial v}$

14. a) $2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+7\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+6\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$. b) $u^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+u\frac{\partial z}{\partial u}$.

15. a) $(a^2+b^2)(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2})$ b) $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}=0$ c) $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$

16. a) $x-\frac{1}{2}x^2+y^2$ b) $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2$ c) $1+x+y+x^2+y^2$

17. f(x,y) = $2x^2-(y-1)^2+R_2$

18. f(x,y) = $1+y+x^2+xy-\frac{y^3}{6}+R_3$

19a) $xy-x^2+O(r^4)$ b) $x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}xy^2+O(r^4)$

20a) 1 b) 2

21. a) Positivt semidefinit b) Indefinit c) Positivt semidefinit

d) Positivt definit ty:

21 a) $\rho(h,k,l) \geq 0$ för alla h,k,l och =0 om h=-k

b) $\rho(h,k,l)=h^2+(k+\frac{l}{2})^2-\frac{l^2}{4}$ antar både positiva och negativa värden:

$\rho(h,0,0)>o$, om $h \neq o$, $\rho(0,k,-2k)<0$ om $k \neq 0$.

c) $\rho(h,k,l)=(h+k)^2+l^2$ d) $\rho(h,k,l)=(h+k)^2+(h+\frac{1}{2}l)^2+\frac{3}{4}l^2$

22. a) Min =-108 i (6,18) b) Min= -1 i (1,1) c) Min = $-\frac{7}{16} i(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$

23a) linjär $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) ej linjär

24. a) $J=\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2x & z & y \\ -\ln z & 2y & -x/z \end{pmatrix}$

25. $x_u{}' = y_u{}' = y_v{}' = \frac{1}{2}$, $x_v{}' = -\frac{1}{2}$, $J_{f^{-1}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

26. $z_x^{'}=6, z_y^{'}=2.$ 27. .-3/2 28. -1/5

29. nej 30. -1; 24 . 31. -34; 13/27