

Uppgifter inför KS3 den 23 mars 2009. CL-08

1 a) Summan av de n första elementen i den aritmetiska talföljden 60, 56, 52, 48betecknas med S_n . För vilka n gäller $300 < S_n < 420$?

b) Den geometriska serien $x + x(2 - 3x) + x(2 - 3x)^2 + \dots$ är given . Vilken är dess summa? För vilket x är summan 2 resp. -3 ?

c) Beräkna $\sum_{n=0}^{\infty} e^{N-n}$

d) Beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2 + 2n + 1} \right)$

e) Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < \frac{4}{3}$

f) Visa att $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^4} < \frac{1}{3(N-1)^3}$

2. Avgör om följande serier konvergerar:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n} - \frac{2}{n+2} \right)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^3$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\pi}{n}} - \cos \frac{\pi}{n} \right)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4 + n} - n^2)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^2 \left(\frac{n+1}{n} \right)$

3. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^{n+\frac{1}{n}}}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n} \cos n\pi$

4. För vilka x konvergerar följande potensserier?

a) $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m+1)3^{m+1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-a)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \ln n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2} x^n$

5. En humla flyger längs kurvan (given på parameterform) $x = 2t^2, y = t^3, t \geq 0$. Då $t = 1$ upptäcker humlan en blomma i punkten (5,3) och flyger istället iväg längs tangenten. Kommer humlan fram till blomman? ($t =$ tiden).

6. Låt $\overline{F(t)} = (\ln t, 2\sqrt{t}, \frac{t}{2})$. Bestäm längden av $\overline{F(t)}$ mellan $t = 1$ och $t = e$.

7. Bestäm tangenterna till $\overline{F(t)}$ i uppgift 2 då $t = 1$ och $t = e$ samt bestäm vinkeln mellan dessa.

8. Bestäm definitionsområde och värdemängd till funktionerna:

a) $f(x,y) = \sqrt{(x-1)(y-2)}$

b) $f(x,y) = \tan(x-y)$

9. Skissera definitionsmängd till följande funktioner:

a) $z = \arcsin(x^2 + y^2)$

b) $(u,v) = (\sqrt{x+y}, \sqrt{1-x+y})$.

10. Ange inre punkter och randpunkter till mängderna i uppgift 9.

11. Beräkna följande gränsvärden:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1-x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

12. Bestäm $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ då a) $f(x,y) = x \sin y + ye^{xy}$ b) $f(x,y) = \sqrt{e^{x+2y} - y^2}$

13. Bestäm $b \frac{\partial z}{\partial x} - a \frac{\partial z}{\partial y}$ då $z = f(ax+by)$.

14. Visa att $u(x,y) = h(x^2y)$ satisfierar den partiella differentialekvationen $x^2 u_{xx} - x u_x - 4y^2 u_{yy} = 0$

15. Bestäm ekvationen för a) tangentplanet b) normalen till ytan $x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$ i punkten (1,2,-1).

16. Ytorna $x + y + z = 3$ och $x^2 - y^2 + 2z^2 = 2$ skär varandra längs en rymdkurva. Bestäm normalplanet och tangenten till kurvan i punkten (1,1,1)

17. Ytorna $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ och $x^2 + 1 = (2-4a)y^2 + az^2$ skär varandra i punkten (1,-1,2). För vilka värden på a skär de varandra vinkelrätt?

Svar till inför KS3 , Matematik II för CL, SF1613 VT09

1 a) $6 < n < 10$, $21 < n < 25$ b) $S = \frac{x}{3x-1}$. $S=2$ då $x = \frac{2}{5}$, summan kan ej bli -3

c) $\frac{e^{N+1}}{e-1}$ d) 1

2. a) konv b) div c) konv

d) div e) div f) div

g) konv

3. a) konv b) konv c) konv

d) konv e) konv

4. a) $-3 \leq x < 3$ b) konvergens för alla x c) $x=a$

d) $-1 < x < 3$ e) $-2 \leq x < 2$ f) $-e < x < e$

5. nej

6. $\frac{1}{2} + \frac{e}{2}$

7. Tangenten då $t = 1$ är $(x,y,z) = (t, 2+t, \frac{1}{2} + \frac{t}{2})$ och tangenten då $t = e$ är $(x,y,z) = (1 + \frac{1}{e}t, 2\sqrt{e} + \frac{1}{\sqrt{e}}t, \frac{e}{2} + \frac{t}{2})$. Vinkeln mellan tangenterna är $\arccos(\frac{4 + 4\sqrt{e} + e}{3(2 + e)})$.

8a) Definitionsmängd: $x \geq 1$ och $y \geq 2$ samt $x \leq 1$ och $y \leq 2$. Värdeområde: $f(x,y) \geq 0$

b) Definitionsmängd: $x - y \neq \pi/2 + n\pi$. Värdeområde: $f(x,y) \in \mathbb{R}$

9. a) $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ b) $D = \{(x,y) : -y \leq x \leq y + 1\}$

10 . a) Inre punkter: $x^2 + y^2 < 1$, Randpunkter: $x^2 + y^2 = 1$

b) Inre punkter: $-y < x < y + 1$, Randpunkter: $y = -x$ för $x < \frac{1}{2}$, $y = x - 1$ för $x \geq \frac{1}{2}$

11. a) -1

b) Existerar ej

12. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin y + y^2 e^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos y + e^{xy} + xy e^{xy}$

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^{x+2y}}{2\sqrt{e^{x+2y} - y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^{x+2y} - y}{\sqrt{e^{x+2y} - y^2}}$

13. 0

15. a) $6x - 11y - 14z + 2 = 0$ b) $(x, y, z) = (1, 2, -1) + t(-6, 11, 14)$

16. $3x - y - 2z = 0$ och $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(3, -1, -2)$

17. För alla a -värden