KTH Matematik, Hans Thunberg
SF1622 Envariabelanalys och Linjär Algebra, HT 2008 för Öppen Ingång

Grupparbete till lektionspass L9, 18/11.

(1) (a) En bekant till dig frågar om du har lärt dig något spännande på KTH. När du då svarar att du precis har förstått hur oändligt många termer kan läggas ihop till ett ändligt tal får du en tvivlande blick tillbaks. Rita en figur som övertygar din bekant om att

$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \cdots = 1.$ (Tänk "tårtdiagram".)

(b) Rita nu en figur som visar att

$$\int_1^\infty \frac{1}{2^x}\,dx \le \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k}. \qquad \text{(Jfr figur sid 340 i Persson \& Böiers.)}$$

Nu kan du kanske också övertyga din bekant om att obegränade områden kan ha ändlig area.

(c) Beräkna såväl $\int_1^\infty \frac{1}{2^x}\,dx$ som $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k}$ och visa på så sätt att de bilder du gjort ger korrekta slutsatser.

(d) Tillämpa Sats 1 i kapitel 7.9, sid 341, i Persson & Böiers på $f(x) = 1/2^x$. Skriv ut och förenkla de olikheter man får i detta fall.

(2) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området $0 \le y \le \sin x$, $0 \le x \le \pi$, får rotera kring x-axeln. Härled först den generella formeln för volymen av rotionskroppar som uppkommer när områden av formen $0 \le y \le f(x)$, $a \le x \le b$, får rotera runt x-axeln.

(3) För varje värde på t utgör $(\cos t, \sin t)$ en punkt i planet. Om du tänker på t som en tidsvariabel kommer punkten $(\cos t, \sin t)$ att röra på sig i takt med att t ändras. Beskriv den kurva som uppstår då t varierar mellan 0 och 2π.

Ett vanligt skrivsätt för en sådan s k *parameterkurva* är

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Skissera och bekriv nu också kurvan

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t < \infty.$$

Vilket kurvor beskrivs i följande parametriseringar?

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty, \qquad \text{resp.} \qquad \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, \quad a, b, x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$