LAPPSKRIVNING 2 SF1622 HT08

LÖSNINGSFÖRSLAG (Ver. A) + SVAR (Ver. B).

(1) $x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$ så vi ansätter

$$\frac{3x-1}{(x^2+2x-15)} \overset{\text{ANSATS}}{=} \frac{A}{(x+5)}+\frac{B}{(x-3)}=\frac{A(x-3)+B(x+5)}{(x+5)(x-3)}=\frac{(A+B)x+(-3A+5B)}{(x+5)(x-3)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ -3A+5B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1 \end{cases}$$

Alltså gäller att

$$\int \frac{3x-1}{x^2+2x-15}\,dx = 2\int\frac{dx}{x+5}+\int\frac{dx}{x-3}=$$

$$=2\ln|x+5|+\ln|x-3|+C \quad \text{:SVAR}$$

SVAR B-version: $2\ln|x-4|+\ln|x+3|+C$

(2) $$\int_0^\infty \frac{x^3}{1+x^8}\,dx = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^3}{1+x^8}\,dx$$

Riemann integrerbar
och därmed ändlig

Konvergensen/divergensen beror
alltså på $\int_1^\infty \frac{x^3}{1+x^8}\,dx$

På $[1,\infty)$ är $0 < \frac{x^3}{1+x^8} < \frac{x^3}{x^8} = \frac{1}{x^5}$

och $\int_1^\infty \frac{1}{x^5}\,dx$ är konvergent

$\Longrightarrow \int_1^\infty \frac{x^3}{1+x^8}\,dx$ konvergent

Alltså är även $\int_0^\infty \frac{x^3}{1+x^8}\,dx$ konvergent.

SVAR (A och B): Konvergent.

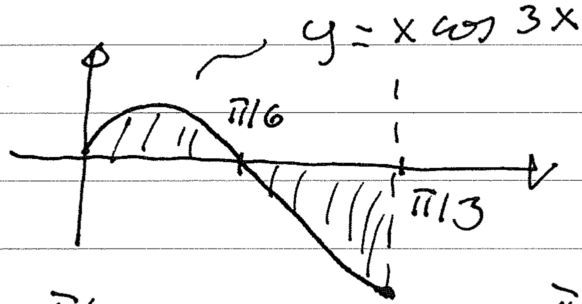
Uppgiften kan även lösas med explicit
beräkning genom att substituera $t=x^4$
som leder till $\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$

(3) $y = x\cos 3x \qquad 0 \le x \le \pi/3$

Nollställen: $x\cos 3x = 0 \iff x = 0$ eller $\cos 3x = 0$

$\cos 3x = 0 \iff 3x = \pm\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \iff x = \pm\frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{3}$

I $[0, \pi/3]$ finns två nollställen: $x=0$, $x=\frac{\pi}{6}$



- $A = \int_0^{\pi/3} |x\cos 3x|\,dx = \int_0^{\pi/6} x\cos 3x\,dx - \int_{\pi/6}^{\pi/3} x\cos 3x\,dx$

- $\int x\cos 3x\,dx = \begin{bmatrix} U = x & V = \frac{1}{3}\sin 3x \\ dU = dx & dV = \cos 3x\,dx \end{bmatrix} =$

$= \frac{x}{3}\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x\,dx = \frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x$

Vi får

$A = \left[\frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x\right]_0^{\pi/6} - \left[\frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x\right]_{\pi/6}^{\pi/3}$

$= \frac{\pi}{18}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{9}\cos\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{9}\cos 0 - \frac{\pi}{9}\sin\pi - \frac{1}{9}\cos\pi + \frac{\pi}{18}\sin\frac{\pi}{2}$

$+ \frac{1}{9}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{9}$

SVAR: $\frac{\pi}{9}$ a.e. SVAR (B-ver.) $\frac{\pi}{4}$ a.e.