

Problem och övningar till lektionspass L15, 9/12.

- (1) Bestäm den funktion $y(x)$ som uppfyller differentialekvationen

$$y'' - 2y' + 5y = 10x^2$$

och begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 0$.

- (2) Visa att mittpunkterna på sidorna i en fyrhörning alltid bildar hörnen i en parallelogram.

- (3) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vilka av följande uttryck är meningsfulla? Beräkna dessa!

a) $AB - 2C$ b) $BA + 3C$ c) $\det(CAB)$ d) $\det(CA)$.

- (4) Låt

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Undersök om det finns reella tal s och t sådana att $\mathbf{w} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$.

- (5) Bestäm arean av den triangel som har sina hörn i punkterna $(1, 0, 1)$, $(2-1, 3)$ och $(4, 1, 1)$. Visa vidare att vinkeln vid $(1, 0, 1)$ är spetsig. Bestäm också en normalvektor till triangeln. (ON-system).
- (6) Hur kan man beräkna volymen av en parallelepiped om man känner kantvektorernas komponenter i ett ON-system? Förklara också hur detta hänger samman med frågan om tre givna vektorer är komplanära eller ej.

(7) Bestäm skärningspunkten mellan linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och planet $x + y - z = 3$. Bestäm också vinkeln mellan linjen och planet (ON-system).

(8) Bestäm talen a och b så att systemet

$$\begin{cases} ax + y - z = 3 \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x + 9y - 6z = b \end{cases}$$

får oändligt många lösningar, och ange också dessa.

(9) Bestäm avståndet mellan planet $-2y + z = 1$ och den linje som går igenom de två punkterna $(1, 1, -1)$ och $(0, 0, -3)$.

(10) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x + y + z + w = 1 \\ x - y + z + w = 1 \\ x + y - z + w = 1 \\ -x + y + z - w = 1 \end{cases}$$

Beräkna också koefficientmatrisens determinant.