KTH Matematik
Hans Thunberg

SF1622 Envariabelanalys och Linjär Algebra
HT 2008 för Öppen Ingång

Inlämningsuppgift

Denna inlämningsuppgift ger maximalt 2 poäng att addera till tentamenskrivningens B-del. Poängen utfaller först då ett godkänt resultat redan har uppnåtts. Skriftliga lösningar lämnas senast torsdagen 20/11. Förutom den skriftliga lösningen krävs också att du muntligen kan redogöra för dina lösningar vid lektionstillfället tisdagen 2/12, 13.15 - 15.00. De skriftliga lösningarna kan inte kompletteras vare sig vid det muntliga tillfället eller på annat sätt.

Vid bedömingen kommer att fästas vikt såväl vid det matematiska innehållet som vid själva presentationen. Skriv tydligt och strukturerat. Det går bra att lämna handskrivna lösningar. Lösningarna skall vara fullständiga och skrivna så att de går att läsa som en löpande text av någon med förkunskaper motsvarande dina egna. Att motivera och förklara är lika viktigt som att räkna. Satser ur kurslitteraturen får användas, men du ska naturligtvis tala om vilka satser du använder. Att kopiera andras arbeten, eller lösningar ur andra läroböcker etc, är absolut inte tillåtet och betraktas som fusk.

Kom ihåg att skriva namn och personnummer på alla blad du lämnar in.

Bakgrund

Potenser a^b, $a \geq 0$, definieras i läroboken (Persson och Böiers, *Analys i en variabel*, kapitel 1.6) för heltalsexponenter och rationella exponenter. Helt kort förklaras också hur potenser med reella icke-rationella exponenter kan definieras genom approximatiom med rationella exponenter, men detta sista steg är tekniskt mycket mer komplicerat att genomföra och ligger utanför ramarna på en första kurs i envariabelanalys. Logaritmer definieras sedan i kapitel 1.7 som inverser till exponentialfunktioner a^x.

Det finns ett alternativt tillväga gångssätt där man, efter att ha definierat a^b, $a \geq 0$ för rationella exponenter b, istället *börjar* med att definiera naturliga logaritmer. När väl den naturliga logaritmen är definierad går man vidare med att definiera talet e och funktionen e^x, var efter exponentialfunktioner och logaritmer med godtycklig bas kan införas. Denna inlämningsuppgift tar ett par inledande steg på denna väg.

Uppgifter

Förutsättningen för uppgifterna nedan är alltså att exponentialfunktioner, logaritmer samt potenser med icke-rationella exponenter är odefinierade begrepp, de "vanliga räknelagarna" för dessa är med andra ord att betrakta som okända.

Definiera funktionen $L(x)$ för $x > 0$ genom

$$L(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^x \frac{1}{s}\, ds.$$

1a) Visa att funktionen $L(x)$ är inverterbar.

1b) Låt $E(x)$ beteckna inversen till $L(x)$. Visa att $E(x)$ är en deriverbar funktion som uppfyller villkoren

$$\begin{cases} E'(x) = E(x) \\ E(0) = 1 \end{cases}$$

Du kommer senare när du läser mer om differentialekvationer att se att dessa två villkor bestämmer funktionen unikt och fullständigt, dvs det finns en och bara en funktion som uppfyller dessa två villkor. Följaktligen är $L(x)$ och $E(x)$ logiskt fullständigt definierade versioner av vad vi vill mena med $\ln x$ respektive e^x (eftersom de uppfyller "rätt" integral- resp. deriveringsformel)

2) Visa utgående ifrån definitionerna i uppgift 1 att $L(1/x) = -L(x)$ och att $E(-x) = 1/E(x)$. Vilka "välbekanta" räkneregler för $\ln x$ respektive e^x svarar dessa emot?

Kommentarer

Nästa steg i detta program för att sätta logaritmer, potenser och exponetialfunktioner på säker mark är att visa, fortfarande utgående ifrån deinfitionen ovan, att de övriga räknelagar vi vill ska gälla faktiskt också gäller, dvs det gäller att bevisa att

i. $L(xy) = L(x) + L(y), \quad \forall x, y > 0;$
ii. $L(x/y) = L(x) - L(y), \quad \forall x, y > 0;$
iii. $L(x^r) = rL(x), \quad \forall x > 0, \forall r \in \mathbb{R};$
iv. $E(x + y) = E(x)E(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$
v. $E(x - y) = E(x)/E(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$
vi. $E(rx) = [E(x)]^r \quad \forall x, r \in \mathbb{R}.$

Pröva gärna att genomföra detta (men det är inget som krävs på denna inlämningsuppgift).

Man definierar vidare talet e som $e \stackrel{\text{def}}{=} E(1)$, och visar sedan att man kan tolka $E(x) = e^x$ för alla reella tal x.

Med detta avklarat kan man sedan gå vidare att definiera

$$a^x \stackrel{\text{def}}{=} e^{x \ln a}$$

och dess invers $\log_a x$, samt härleda potens- och logaritmlagar för dessa ...