Bestäm den sneda asymptoten för $f(x) = \dfrac{x^5 - x^3}{4x^4 + 2x}$ då $x \to +\infty$.

Alltså då $x \to +\infty$ ska $f(x)$ närma sig en rät linje på formen $kx + m$.

Skriver vi $d(x)$ som avståndet mellan $f(x)$ och $kx+m$ ska $d(x) \to 0$ då $x \to +\infty$ om en sned asymptot finns.

$$d(x) = |f(x) - kx - m| \quad \text{(avståndet)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} d(x) = \lim_{x \to +\infty} |f(x) - kx - m| \quad (*)$$

$d(x) \to 0$ då $x \to +\infty$ var ett krav.

m blir obetydligt stort då $f(x)$ och kx växer obegränsat. Alltså kan m bortses ifrån.

$$\Rightarrow \quad 0 = \lim_{x \to +\infty} f(x) - kx$$

vill bestämma k

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

gränsvärdet måste finnas för att en sned asymptot ska finnas.

i vårt fall:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 - x^3}{x(4x^4 + 2x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^5}(1 - \frac{1}{x^2})}{\cancel{x^5}(4 + \frac{2}{x^3})} = \frac{1 - 0}{4 + 0} = \frac{1}{4}$$

använder vi $k = \frac{1}{4}$ i $(*)$ får vi:

$$\lim_{x \to +\infty} d(x) = \lim_{x \to +\infty} |f(x) - \tfrac{1}{4}x - m|$$

$$0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 - x^3}{4x^4 + 2x} - \frac{1}{4}x - m$$

$$\frac{1}{4}x = \frac{1\,(x^4 + \frac{x}{2})}{4(x^4 + \frac{x}{2})}\,x = \frac{x^5 + \frac{x^2}{2}}{4x^4 + 2x}$$

gemensam nämnare

$$\Rightarrow \quad 0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 - x^3}{4x^4 + 2x} - \frac{x^5 + \frac{x^2}{2}}{4x^4 + 2x} - m$$

$$\Leftrightarrow$$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^5} - x^3 - \cancel{x^5} - \frac{x^2}{2}}{4x^4 + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^4}(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2})}{\cancel{x^4}(4 + \frac{2}{x^3})} = \frac{-0 - 0}{4 + 0} = \frac{0}{4}$$

Alltså fås linjen $kx + m$ som $\frac{1}{4}x + 0$.